COMITETUL PENTRU ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR DE PE LÂNGĂ CONSILIUL DE MINIŞTRI

N. P. TARASOV

MANUAL DE MATEMATICI SUPERIOARE

PENTRU UZUL ŞCOLILOR MEDII TEHNICE

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Pagina	Rândul	In loc de:	Se va citi:
16	22	(0,3)	(3,3)
51	16 de jos	PQ	RQ
60	6	și $y = \frac{b}{a}x$	și $y = -\frac{b}{a}x$
72	12 de jos	$+\frac{\varrho^2}{b^2}$	$+\frac{y^2}{b^2}$
86	13 de jos	$=\left\|\frac{a}{b}\right\|$	$=\frac{\|a\|}{\|b\|}$
91	3 de jos	$+\frac{y^2}{b^2}$	$-\frac{y^2}{b^2}$
106	1 de jos	$\frac{16}{16}$	$\frac{15}{16}$
110	22	infinit mari	infinit mici
115	21 și 24	constant	finit
116	11 de jos	constant	finit
118	5	mai sus	mai jos
122	6 de jos	$y = x^2$	$y = c^2$
148	10 de jos	47	4,7
159	3	$u = -\varphi(x) \quad y = -f(u)$	$-u = -\varphi(x) \quad -y = -(fu)$
160	8 de jos	$x^{-\frac{7}{4}}$	$x^{-\frac{4}{7}}$
161	8	$\sqrt{a^2 - {}^2x}$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
	10	cu u	cu derivata lui u
175	3 de jos	$+\frac{4,5}{t^{-2,5}}$	$+\frac{4,5}{t^{2,5}}$
176	2	f''(1)	f'(1)
193	8	infinit	finit
195	1	$\varphi'(x)\lim_{x\to 0}$	$\varphi'(x) = \lim_{x\to 0}$
202	1 și 7	în sus	(se suprimă)
214	16	$\lim_{x\to 0}\frac{\delta A}{1}$	$\lim_{x\to c}\frac{\delta A}{A}$
221	6		

249	1	$\int(1-\cos^2 x\ x$	$\int(1-\cos^2 x)\sin\ x\ dx$
	2	$-\int\cos\sin\ x\ x$	$-\int\cos^2 x\ \sin\ x\ dx$
268	5 de jos	piramide	prisme
273	3	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$
294	2 jos	$\varphi = \pi$	$\varphi = 2\pi$
300	1 jos	$\varphi = 2a\ \cos\varphi$	$\rho = 2a\cos\varphi$
302	11—12	$\rho^2=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)2a\ \rho\ \cos\varphi + a^2 = a^2$ (se suprim.)	
307	15	$\rho = ae^{m\varphi'}$	$\rho = ae^{m\varphi}$
	18	logaritmică	hiperbolică
	3 de jos	$= a\ e^{(m\varphi_2)^2}$,	$= a\ (e^{m\varphi_1})^3$,
308	2	$\rho_2 = a$	$\rho_0 = a$
	10	$\varphi_4^2 = \rho_0\rho_2$.	$\rho_4^2 = \rho_0\rho_2$
	23	unghiurilor φ,	unghiurilor φ negative,
	Nota jos	$\varphi_4^2 = \varphi_0\varphi_2$.	$\rho_4^2 = \rho_0\rho_2$

Scanned with OKEN Scanner

1. 204 III 954 T

COMITETUL PENTRU ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR DE PE LÂNGĂ CONSILIUL DE MINIŞTRI

N. P. TARASOV

MANUAL DE MATEMATICI SUPERIOARE

PENTRU UZUL ŞCOLILOR
MEDII TEHNICE

4/142

EDITURA TEHNICĂ
1952

ANTICARIAT
Lei 10.-

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Elevii cunosc două discipline de matematici : geometria şi algebra. A doua disciplină, algebra, pare a fi opusă geometriei. Oricine va spune că învăţarea proprietăţilor triunghiului face parte din geometrie, iar rezolvarea unei ecuaţii de gradul doi intră în domeniul algebrei.

Prima parte a acestui manual cuprinde elementele disciplinei care poartă denumirea de : „geometrie analitică". Prin urmare aceasta nu este geometria învăţată anterior. Prin „geometrie analitică" se înţelege acea disciplină care are drept obiect studierea formelor geometrice (figuri, linii, suprafeţe etc.), cu ajutorul algebrei.

Dar şi în geometria elementară elevii au întâlnit cazuri de aplicare a algebrei : multe probleme geometrice se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor. Totuşi aplicarea algebrei nu formează o metodă sistematică în geometria elementară. Pe de altă parte, în geometria analitică se studiază cu ajutorul algebrei particularitatea cea mai esenţială a obiectelor geometrice, forma lor şi poziţia lor reciprocă. Elevii vor vedea, de exemplu, cum se poate exprima cercul cu ajutorul unei ecuaţii.

Nu este indicat să încercăm a prezenta mai amănunţit metoda folosită în geometria analitică la studierea obiectelor geometrice, întrucât o astfel de prezentare ar constitui chiar o expunere a acestei discipline.

Celelalte două părţi ale manualului conţin expunerea elementelor calculului diferenţial şi integral.

La baza acestor discipline se află noţiunea de limită a unei mărimi variabile, cunoscută elevilor. Această noţiune elevii au cunoscut-o în studiul geometriei, unde limita se foloseşte numai dela caz la caz, pe când în calculul diferenţial şi integral noţiunea de limită este fundamentul pe care se construeşte această disciplină.

Obiectul acestei discipline şi metoda ei nu pot fi arătate aici întrucât ar trebui să expunem chiar conţinutul manualului.

Calculul diferenţial şi integral constitue în prezent capitole introductive la un domeniu larg al matematicii, denumit „analiză matematică".

Scanned with OKEN Scanner

Analiza matematică a luat naştere aproximativ acum vreo 300 ani. Ea a reieşit dintr'un număr de probleme de fizică, astronomie, geometrie, mecanică, care la rândul lor au rezultat din nevoile navigaţiei, ale astronomiei, artei războiului, opticei, arhitecturii şi ale altor cerinţe, legate de desvoltarea tehnicei, culturii şi civilizaţiei. Astăzi nu se poate studia niciun domeniu al tehnicei fără a cunoaşte cel puţin bazele analizei. Construirea edificiului grandios şi măreţ al analizei matematice a fost realizată prin eforturile multor matematicieni renumiţi, printre care numele matematicienilor ruşi strălucesc cu o glorie nepieritoare.

Nu este posibil a da într'o introducere scurtă o idee despre aportul uriaş în matematică al savanţilor sovietici şi nu pot fi nici chiar enumerate numele celor mai mari matematicieni.

Deaceea suntem nevoiţi să ne limităm numai la pomenirea unor savanţi, care au jucat un rol de frunte în istoria matematicei.

Dacă vorbim despre istoria desvoltării analizei, trebue amintit învăţatul rus, academicianul Mihai Vasilievici Ostrogradschi (1801—1862). Un număr de rezultate ştiinţifice ale lui M. V. Ostrogradschi au fost publicate în manuale şi numele lui este cunoscut tuturor matematicienilor.

M. V. Ostrogradschi a lăsat lucrări frumoase nu numai în matematică, ci şi în mecanică, în mecanica cerească şi în alte domenii înrudite cu matematica.

Toţi cunosc numele lui Pafnutie Lvovici Cebâşev (1821—1894), care a lăsat urme trainice în toate domeniile matematicii. Lui i se datoresc lucrări excelente atât în domeniul matematicii pure, cât şi în domeniul ştiinţelor aplicate.

Lucrările lui în domeniul teoriei mecanismelor sunt clasice. P. L. Cebâşev a elaborat peste 40 mecanisme diferite.

Un matematician de seamă a fost elevul lui P. L. Cebâşev, Alexandru Mihailovici Liapunov (1857—1918). A. M. Liapunov a lucrat în mai multe domenii ale matematicii şi mecanicei. Precizia cercetărilor sale în rezolvarea problemelor celor mai dificile este uimitoare.

Este interesant că cunoscutul savant francez H. Poincaré (1854—1912) a elogiat numele lui A. M. Liapunov pentru publicarea unei lucrări în care au fost expuse rezultatele care reprezintă numai o parte a tezei lui A. M. Liapunov.

Desigur, elevii cunosc numele unuia dintre cei mai străluciţi matematicieni, al lui Nicolai Ivanovici Lobacevschi (1793—1856). Genialele lucrări ale lui Lobacevschi nu sunt legate de analiza matematică, ci se referă la geometrie. N. I. Lobacevschi a descoperit o geometrie nouă, diferită de geometria cunoscută din timpul lui Euclid. Ideile lui Lobacevschi au depăşit într'atâta epoca lui, încât nu au fost acceptate

Scanned with OKEN Scanner

nici de către matematicienii de vază din acel timp şi au fost recunoscute abia după moartea lui.

Matematicienii ruşi geniali din secolul trecut au lucrat, fie în completă izolare, ca N. I. Lobacevschi, fie înconjuraţi de un număr mic de elevi.

Lucrările lor au fost accesibile numai unui cerc restrâns de specialişti şi nu putea fi vorba de o recunoaştere de către societate a meritelor lor. Cercurile oficiale guvernamentale erau indiferente şi uneori chiar duşmănoase faţă de desvoltarea ştiinţei în Rusia.

Citind biografiile marilor savanţi ruşi, ne uimeşte puterea de voinţă cu care au apărat interesele ştiinţei faţă de inerţia cercurilor oficiale.

Deaceea nu este de mirare că înflorirea actuală a ştiinţei şi în special a matematicii, a început abia cu Marea Revoluţie din Octombrie 1917.

După Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie ştiinţa a devenit un bun al maselor. A fost organizată în ţară o reţea largă de noi instituţii de învăţământ superior şi de cercetări ştiinţifice.

Invăţătura a devenit accesibilă tuturor cetăţenilor Uniunii Sovietice. Fiecare cunoaşte condiţiile în care au fost puşi oamenii de ştiinţă din U. R. S. S., prin grija Partidului şi a Guvernului.

In toate republicile unionale s'au format centre mari ştiinţifice. Deaceea astăzi aproape nu se mai găsesc savanţi care să nu fie înconjuraţi de un grup de elevi şi continuatori. Creaţia ştiinţifică a devenit colectivă.

S'au format şcoli sovietice pentru diferite domenii ale matematicii: teoria funcţiilor, teoria numerelor, teoria probabilităţii etc. Mulţi matematicieni sovietici lucrează cu succes în domenii aplicate. Matematicienii sovietici au deasemenea merite numeroase în munca de onoare pentru apărarea Patriei.

Matematica sovietică ocupă în prezent un rol de frunte în lume.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

COORDONATELE RECTANGULARE ALE UNUI PUNCT ÎN PLAN

PROBLEME ELEMENTARE PENTRU APLICAREA METODEI COORDONATELOR

§ 1. Determinarea poziţiei unui punct în plan cu ajutorul numerelor

1. Cea dintâi problemă a geometriei analitice este stabilirea unui mod de determinare a poziţiei unui punct în plan cu ajutorul numerelor.

Să ne închipuim într'un plan două drepte Ox şi Oy perpendiculare între ele (fig. 1).

Poziţia acestor drepte în plan o considerăm cunoscută şi vom determina poziţia unui punct oarecare din plan în raport cu sistemul acestor drepte.

Fie M un punct oarecare. Din acest punct coborîm perpendicularele MP şi MN pe dreptele Oy şi Ox şi, alegând o unitate de măsură oarecare, măsurăm lungimile x şi y ale acestor perpendiculare *).

Numerele x şi y le punem în corespondenţă cu punctul M, le considerăm drept caracteristice pentru acest punct şi le numim coordonate ale punctului M.

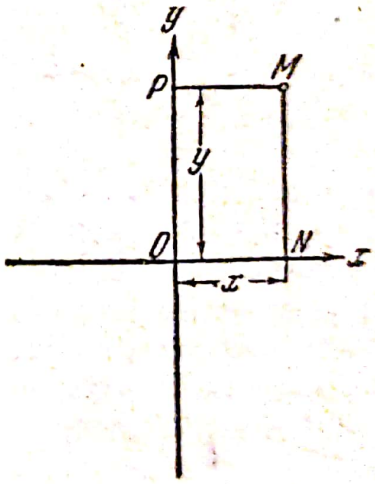

Fig. 1.

Din construcţie rezultă în mod evident că fiecărui punct M al planului îi corespunde o pereche determinată şi unică de coordonate x, y.

2. Invers, cunoscând coordonatele unui punct, putem construi punctul în plan, cum rezultă clar din fig. 1.

Această construcţie poate fi făcută în modul următor : din punctul

*) Lungimile perpendicularelor MN şi MP nu trebue măsurate neapărat cu aceeaşi unitate de măsură. Totuşi vom presupune, mai departe, în toate calculele, că unitatea de măsură este aceeaşi.

O aşezăm segmentul $ON = x$ (pe dreapta Ox) şi segmentul $OP = y$ (pe dreapta Oy).

Prin punctul N ducem o perpendiculară la dreapta Ox, iar prin punctul P o perpendiculară pe dreapta Oy. Punctul de intersecţie al acestor două perpendiculare este punctul căutat M.

Punctul M poate fi construit mai simplu şi anume în felul următor : aşezăm pe dreapta Ox, din punctul O, segmentul $ON = x$ şi în punctul N construim o perpendiculară pe axa Ox; mai departe, pe această perpendiculară aşezăm segmentul $NM = y$, pornind din punctul N; evident, capătul acestui segment ne va da acelaşi punct M pe care l-am obţinut prin construcţia anterioară.

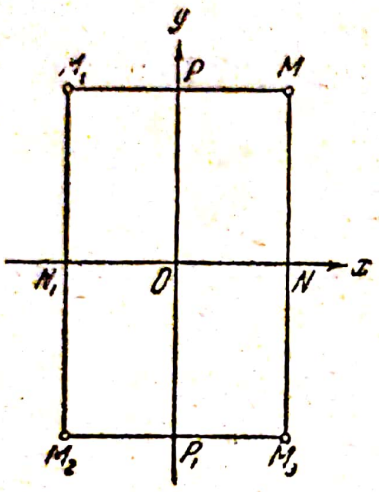

Fig. 2.

3. In baza raţionamentului nostru putem avea impresia că nu numai fiecare punct posedă o pereche determinată de coordonate, dar şi invers, că fiecărei perechi de coordonate îi corespunde un punct determinant din plan. Deocamdată însă nu este aşa.

Prelungim segmentul MP la stânga punctului P (fig. 2) şi măsurăm pe prelungirea lui segmentul $PM_1 = MP = x$.

Punctul M_1 se află la aceleaşi distanţe de dreptele Oy şi Ox, ca şi punctul M; prin urmare, unei singure perechi de coordonate x, y îi corespund două puncte M şi M_1, aşezate în mod diferit în plan. Se vede uşor, că nu sunt numai două puncte de acest fel, ci patru : în adevăr punctele M_2 şi M_3 au aceleaşi coordonate, ca şi punctul M.

Prin urmare, nu am obţinut încă rezolvarea complectă a problemei puse, de a caracteriza poziţia unui punct cu ajutorul numerelor şi deaceea trebue înlăturată multiplicitatea soluţiilor în construirea unui punct, dacă sunt date coordonatele lui. Aceasta se poate obţine prin introducerea regulii semnelor, cunoscută elevilor din trigonometrie.

§ 2. Regula semnelor

Punctul O, de intersecţie a celor două drepte Ox şi Oy, împarte pe fiecare dintre ele în două părţi. Astfel, în figurile 1 şi 2 punctul O împarte dreapta Ox în partea dreaptă şi partea stângă, iar dreapta Oy, în partea superioară şi partea inferioară. Baza perpendicularei, coborîtă dintr'un punct al planului pe dreapta Ox, se va afla totdeauna pe una din jumătăţile dreptei Ox, iar segmentul, care reprezintă coordonata x, se va afla la dreapta sau la stânga punctului O.

Scanned with OKEN Scanner

Să convenim a atribui coordonatei x o valoare pozitivă într'unul din aceste cazuri (indiferent în care), iar în cazul celălalt o valoare negativă. Deobicei se atribue coordonatei x valoarea pozitivă, dacă segmentul, care reprezintă această coordonată, se află la dreapta punctului O, şi valoarea negativă la stânga punctului O.

Astfel în fig. 2 punctele M şi M_3 au coordonatele x pozitive, iar punctele M_1 şi M_2 le au negative.

Deobicei se consideră, pe dreapta Ox, ca sens pozitiv cel dela stânga la dreapta, iar cel opus, ca sens negativ. Sensul pozitiv se indică pe figură printr'o săgeată (fig. 3).

In mod analog se determină două sensuri şi pe dreapta Oy (pozitiv, deobicei de jos în sus).

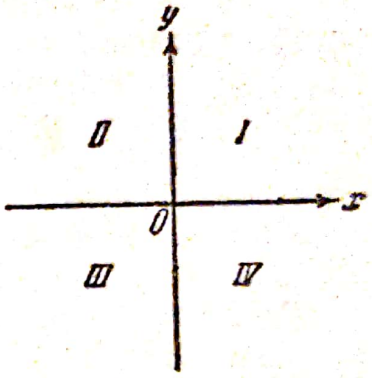

Fig. 3.

Aceasta atrage după sine atribuirea semnelor şi celei de a doua coordonate y a punctului din plan (în fig. 2 punctele M şi M_1 au coordonatele y pozitive, iar punctele M_2 şi M_3 le au negative).

Dreptele Ox şi Oy împart întreg planul în patru părţi, numite pătrimi sau *cadrane*: ele sunt numerotate ca în fig. 3. Coordonatele punctelor, situate într'un cadran, au o combinaţie de semne, diferită de combinaţiile semnelor tuturor punctelor situate într'unul din celelalte cadrane. Aceste combinaţii între semnele coordonatelor, corespunzătoare diferitelor cadrane, se determină, precum se poate uşor vedea, prin tabela următoare:

Cadranul	Semnul abscisei	Semnul ordonatei
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Cum vedem din tabelă nu există printre toate combinaţiile posibile ale semnelor, nicio pereche identică.

Prin urmare, după acceptarea regulii semnelor, fiecărei perechi date (cu semne) de coordonate x, y îi corespunde acum un punct *unic*, bine determinat, şi invers, fiecărui punct îi corespunde o pereche *unică* de coordonate x, y.

In felul acesta, problema determinării poziţiei unui punct în plan cu ajutorul numerelor este complect rezolvată.

§ 3. Sistemul rectangular de coordonate al lui Descartes

Coordonatele unui punct în plan

1. Cu ocazia determinării poziției unui punct în plan cu ajutorul numerelor am fixat pe dreptele Ox și Oy un sens pozitiv și altul negativ. *O dreaptă pe care alegem un anumit sens drept sens pozitiv și căreia îi afectăm o anumită scară, se numește axă.* In felul acesta, poziția unui punct în plan se determină în raport cu axele Ox și Oy, numite *axe de coordonate.* Axele Ox și Oy formează un *sistem de coordonate.*

Vom considera axele de coordonate perpendiculare între ele. Deaceea, acest sistem se numește *sistem rectangular de coordonate.* După numele marelui matematician francez Descartes (1596—1650), care a dat o expunere sistematică a metodei coordonatelor, sistemul acesta se mai numește cartezian. Punctul O de intersecție al axelor se numește originea coordonatelor.

In tratatele amănunțite de geometrie analitică sunt considerate, înafară de sistemul rectangular de coordonate și sisteme de axe oblice, adică sisteme de axe Ox și Oy, care se taie sub un unghi $\omega \neq 90°$.

2. Poziția unui punct M în plan se definește cu ajutorul a două numere x și y, numite *coordonatele* punctului M. Numărul x se numește *abscisă.*

In valoare absolută*) abscisa este egală cu numărul care exprimă distanța dela punct la axa Oy; semnul abscisei se definește după regula semnelor stabilită la § 2. Numărul y se numește *ordonata* punctului M.

In valoare absolută ordonata este egală cu numărul care exprimă distanța dela punct la axa Ox; semnul ordonatei se definește după regula semnelor.

In geometrie lungimea unui segment se înseamnă deobicei ca și segmentul însuși**). Deaceea avem pentru punctul M (fig. 2): $x = ON = MP$, $y = OP = NM$; pentru punctul M_1 avem: $x = -ON_1 = -PM_1$ $y = OP = N_1M_1$, etc.

Pentru a arăta că punctul M este determinat prin coordonatele x și y, se scrie astfel: $M(x, y)$, punând în paranteze, *în mod obligator, întâi abscisa și apoi ordonata.*

Fiecare punct situat pe axa absciselor are ordonata egală cu zero, și fiecare punct al axei Oy are abscisa egală cu zero. Astfel, în fig. 4

---

*) Se numește valoare absolută a unui număr pozitiv, însuși acel număr, iar a unui număr negativ, numărul luat cu semn contrar. Valoarea absolută a lui a se notează cu simbolul $|a|$.

**) Reamintim că se numește segment de dreaptă porțiunea unei drepte limitată de două puncte. Lungimea segmentului se numește numărul care arată de câte ori se cuprinde în segmentul dat un alt segment, luat drept unitate de măsură. Lungimea segmentului este totdeauna un număr pozitiv. Acest număr poate fi întreg, fracționar sau irațional.

Scanned with OKEN Scanner

punctul N are abscisa $x = 3$ şi ordonata $y = 0$: punctul P are abscisa $x = 0$ şi ordonata $y = -2$.

Originea are coordonatele (0, 0).

Exemplul 1. Se dă în plan punctul M. Să se afle coordonatele lui (fig. 5).

Rezolvarea. Coborîm din punctul M perpendiculara MN pe axa Ox şi măsurăm segmentele ON şi NM (unitatea de lungime este indicată în figură). Aflăm $x = -ON = -2{,}5$; $y = NM = 3{,}4$. Obţinem acelaşi rezultat, dacă coborîm

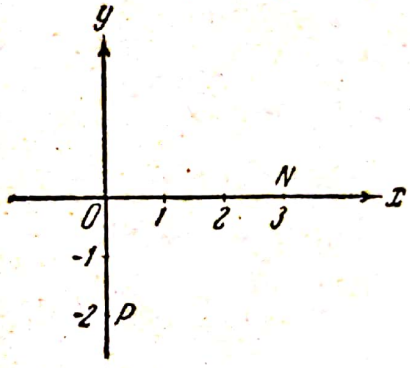

Fig. 4.

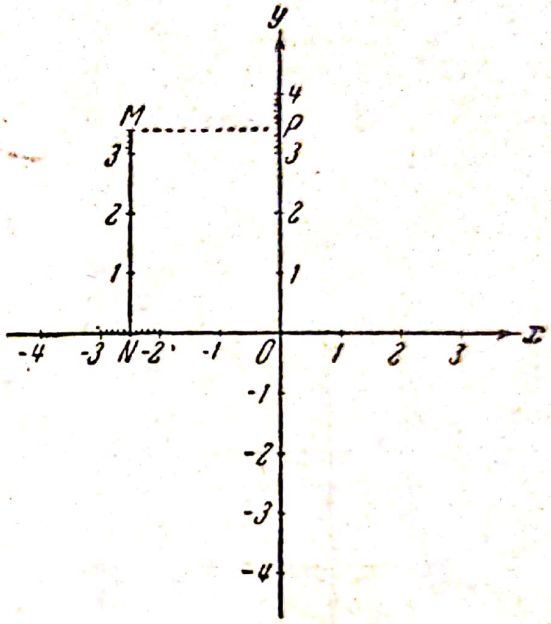

Fig. 5.

din punctul M perpendicularele MN şi MP pe axele de coordonate şi măsurăm segmentele ON şi OP, care se formează pe axele de coordonate.

Exemplul 2. Să se construiască punctul $M\ (-3, -4)$ (fig. 6).

Rezolvare. Ducem axele de coordonate Ox, Oy şi alegem o unitate de lungime. Măsurăm pe axa Ox la stânga originei O (abscisa punctului M fiind negativă) segmentul ON, egal cu trei unităţi de lungime. Ridicăm în capătul N al acestui segment o perpendiculară pe axa Ox şi măsurăm pe această perpendiculară în jos (ordonata punctului căutat fiind negativă) un segment, egal cu patru unităţi de lungime. Capătul acestui segment va fi punctul căutat M (fig. 6). Acelaşi punct M îl obţinem, dacă măsurăm pe axele Ox şi Oy în mod corespunzător segmentele $ON = |-3|$ şi $OP = |-4|$ şi ducem prin punctele N şi P drepte paralele la axe până la întretăierea lor (în punctul M).

Observaţie. Acest mod de deter-

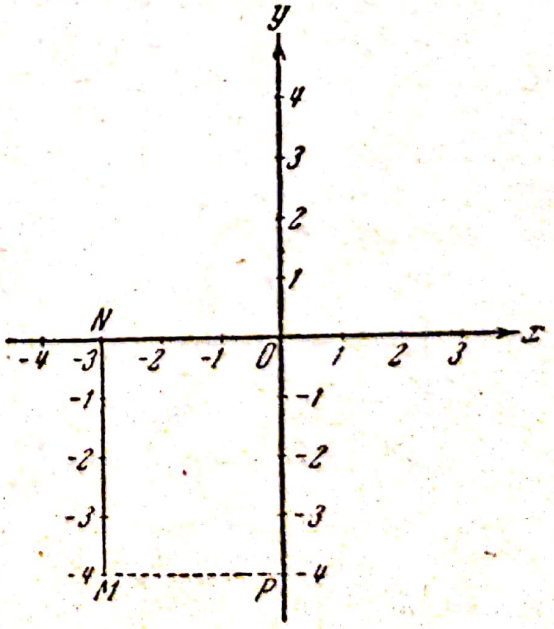

Fig. 6.

minare a poziției unui punct în plan cu ajutorul numerelor este cel mai simplu, însă nu singurul; există multe alte feluri de determinare a unui punct cu ajutorul coordonatelor.

Dintre cele mai des folosite, afară de cel expus, este metoda coordonatelor polare, prezentată în cap. XII.

§ 4. Distanța între două puncte

1. Se dau punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Să presupunem deocamdată că dreapta care trece prin aceste puncte este paralelă cu axa Ox (fig. 7). Atunci $y_2 = y_1$. Segmentul $M_1M_2 = N_1N_2 = N_1O + ON_2$. Din figură aflăm: $N_1O = -x_1$, $ON_2 = x_2$ și prin urmare, $M_1M_2 = x_2 - x_1$.

La obținerea acestei formule am urmărit ca diferența $x_2 - x_1$ să fie un număr pozitiv: pentru poziția punctelor M_1 și M_2 din fig. 7,

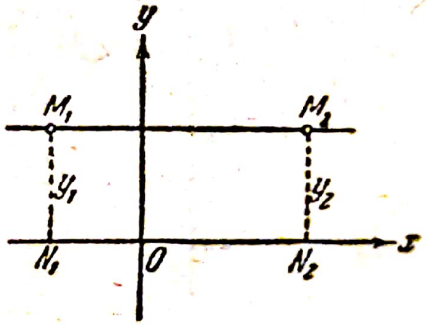

Fig. 7.

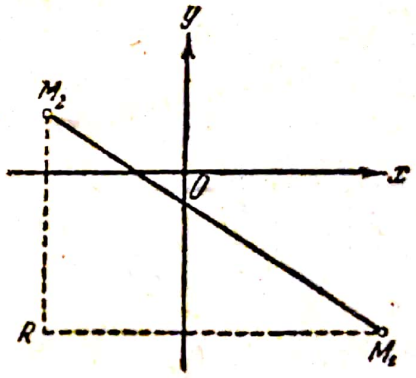

Fig. 8.

abscisa $x_2 > 0$, abscisa $x_1 < 0$, și deaceea $-x_1 > 0$, și diferența $x_2 - x_1 > 0$. Se vede imediat că atunci când schimbăm punctele M_1 și M_2 între ele, abscisa x_2 va fi un număr negativ, iar abscisa x_1 pozitivă și în cazul acesta diferența $x_2 - x_1$, care exprimă lungimea segmentului M_1M_2, va fi un număr negativ, ceeace este în contradicție cu noțiunea lungimii unui segment, care se consideră totdeauna pozitivă. Deaceea vom avea în cazul general:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|, \tag{1}$$

unde, conform convenției, $|x_2 - x_1|$ înseamnă valoarea absolută a diferenței $x_2 - x_1$.

In mod analog, dacă $x_2 = x_1$ adică dacă dreapta, care trece prin punctele M_1 și M_2, este paralelă cu axa Oy, obținem:

$$M_1M_2 = |y_2 - y_1|. \tag{2}$$

2. Dacă $x_2 \neq x_1$ și $y_2 \neq y_1$, atunci dreapta, care trece prin punctele M_1 și M_2, nu este paralelă cu niciuna dintre axele de coordonate (fig. 8). Ducem prin punctele M_1 și M_2 drepte paralele cu

axa Ox, respectiv Oy. Insemnăm punctul de intersecţie al acestor drepte cu R; coordonatele lui vor fi (x_2, y_1).

Conform formulelor (1) şi (2) aflăm

$$M_1R = |x_2 - x_1|, \quad RM_2 = |y_2 - y_1|.$$

Din triunghiul dreptunghic M_1RM_2 avem:

$$M_1M_2 = \sqrt{(M_1R)^2 + (RM_2)^2};$$

înlocuind valorile pentru $(M_1R)^2$ şi $(RM_2)^2$, obţinem în fine:

$$M_1M_2 = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

Sub radicalul din formula (3) stă suma pătratelor diferenţelor $x_2 - x_1$ şi $y_2 - y_1$, în loc de suma pătratelor valorilor absolute ale acestor diferenţe, întrucât este evident că pătratul valorii absolute a unui număr este egal cu pătratul numărului însuşi. Radicalul din formula (3) exprimă distanţa între două puncte şi întrucât această distanţă este un număr pozitiv, se ia cu semnul $+$.

Dacă unul din puncte este originea, adică punctul $O(0, 0)$, iar coordonatele punctului al doilea le notăm cu (x, y), obţinem formula distanţei unui punct la origine:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3^*)$$

Exemplu. Să se afle punctul egal depărtat de trei puncte date: $M_1(1, 2)$; $M_2(-1, -2)$; $M_3(2, -5)$.

Rezolvare. A afla un punct înseamnă a determina coordonatele lui. Să notăm punctul căutat cu M şi coordonatele lui cu x, y.

Aceasta înseamnă că trebue să determinăm cele două necunoscute: x şi y, în care scop urmează să întocmim două ecuaţii din enunţul problemei. Acest enunţ dă două egalităţi.

$M_1M = M_2M$ şi $M_2M = M_3M$. După formula (3) avem:

$$M_1M = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},$$

$$M_2M = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2},$$

$$M_3M = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}.$$

In felul acesta obţinem două ecuaţii în raport cu necunoscutele x şi y:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2},$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}.$$

Rezolvând aceste ecuaţii, vom afla: $x = \frac{8}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$.

Prin urmare, punctul căutat este $P\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Observaţie. Punctul căutat este centrul cercului care trece prin punctele date M_1, M_2 şi M_3.

§ 5. Impărţirea unui segment într'un raport dat

Prin aceasta se înţelege următoarea problemă :

Se dau două puncte : $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ (fig. 9). Un al treilea punct M, a cărui poziţie este necunoscută (adică coordonatele), împarte segmentul M_1M_2 astfel, că raportul $\frac{M_1M}{MM_2}$ este egal cu un număr dat λ.

Să se afle punctul M, adică coordonatele lui x, y.

Din geometria elementară ştim că segmentele M_1M, MM_2, N_1N şi NN_2 sunt proporţionale.

Putem scrie prin urmare :

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \lambda$$

(conform enunţului).

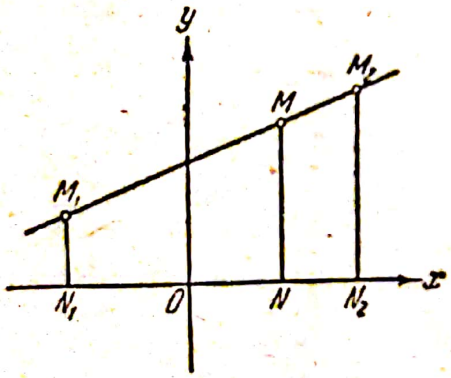

Fig. 9.

Din formula (1) avem însă :

$$N_1N = |x - x_1|,$$
$$NN_2 = |x_2 - x|.$$

Punctul căutat M se află pe segmentul M_1M_2 între punctele M_1 şi M_2. Deaceea pentru oricare poziţie a punctelor M_1 şi M_2 diferenţele $x - x_1$ şi $x_2 - x$ sunt simultan, fie amândouă pozitive, fie amândouă negative.

Deaceea raportul

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

este un număr pozitiv şi putem scrie :

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

de unde aflăm abscisa x a punctului M :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog aflăm ordonata y a punctului M :

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (5)$$

În cazul particular, când punctul M împarte segmentul M_1M_2 în două părți egale, atunci :

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 1$$

și formulele (4) și (5) capătă forma :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad (4^*) \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (5^*)$$

Exemplul 1. Să se afle punctul $M(x, y)$ care împarte segmentul determinat de punctele $M_1(2, 3)$ și $M_2(3, -3)$, în raportul $\frac{2}{5}$.

Rezolvare. În cazul dat $\lambda = \frac{2}{5}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 3$, $y_2 = -3$.

Formulele (4) și (5) dau :

$$x = \frac{2 + \frac{2}{5} \cdot 3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{16}{7}, \quad y = \frac{3 + \frac{2}{5} \cdot (-3)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{9}{7}.$$

Prin urmare punctul căutat este $M\left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

Exemplul 2. Să se demonstreze, că dreapta care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu latura a treia.

Rezolvare. Alegem astfel axele de coordonate încât originea să coincidă cu unul din vârfurile triunghiului, iar axa Ox să coincidă cu o latură care pornește din acest vârf (fig. 10).

Vârfurile triunghiului vor fi : $O(0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, y_2)$. Dreapta CD unește mijloacele laturilor OB și AB. Ni se cere să demonstrăm, că CD este paralelă cu OA sau, ceeace este același lucru, că este paralelă cu Ox.

Pentru aceasta ordonatele punctelor C și D trebue să fie egale, Ordonatele y_C și y_D ale punctelor C și D se determină prin formula (5*);

$$y_C = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}, \; y_D = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Prin urmare, $y_C = y_D$, adică dreapta CD este paralelă cu latura OA.

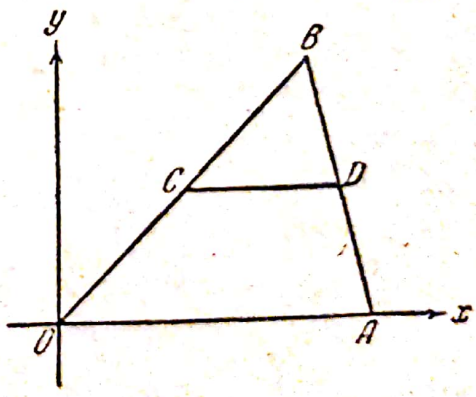

Fig. 10.

Exemplul 3. Asupra punctelor materiale $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ de mase m_1 și m_2 acționează forța gravității. Să se afle coordonatele centrului de greutate al acestui sistem.

Rezolvare. Știm din mecanică că centrul de greutate se află pe segmentul M_1M_2 într'un punct $N(x, y)$, care împarte acest segment într'un raport, invers celui al forțelor care acționează în punctele M_1 și M_2, adică în raportul $\frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}$, unde g este accelerația gravității.

Ținând seama de aceasta, vom avea:

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

sau:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Exerciții

1. Să se construiască punctele definite de coordonatele:

$x = 3, \ y = 5$; $x = -2, \ y = 0$; $x = 2, \ y = -4$;

$x = 0, \ y = 3$; $x = 3, \ y = -3$; $x = \sqrt{2}, \ y = 1$.

2. Se dă punctul $x = 4, \ y = -3$. Să se afle coordonatele punctului simetric celui dat, în raport cu: 1) axa absciselor; 2) axa ordonatelor.

R: (4, 3); (—4, —3).

3. Să se afle simetricul punctului (3, — 5) în raport cu bisectoarea primului unghi al axelor de coordonate.

R: (—5, 3).

4. Se dă un pătrat cu latura egală cu 3 unități de lungime. Să se afle coordonatele vârfurilor acestui pătrat, dacă se iau două laturi neparalele ca axe de coordonate.

R: (0, 0); (3, 0); (0, 3); (0, 3);
(0, 0); (0, 3); (— 3, 3); (— 3, 0);
(0, 0); (— 3, 0); (—3, — 3); (0, — 3);
(0, 0); (0, — 3); (3, — 3); (3, 0).

5. Se dă un pătrat cu latura egală cu 4 unități de lungime. Să se afle coordonatele vârfurilor acestui pătrat, dacă se iau ca axe de coordonate diagonalele pătratului.

R: $(2\sqrt{2}, 0)$; $(0, 2\sqrt{2})$; $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(0, -2\sqrt{2})$.

6. Se dă un romb cu latura de 5 unități de lungime și diagonala de 6 unități. Să se afle coordonatele vârfurilor rombului, dacă se iau diagonalele ca axe de coordonate.

R: (3, 0); (0, 4); (—3, 0); (0, — 4)
sau (4, 0); (0, 3); (—4, 0); (0, — 3).

7. Să se afle coordonatele vârfurilor unui hexagon regulat, cu latura egală cu a, știind că originea este situată în centrul hexagonului, iar axa absciselor trece prin două vârfuri opuse.

R: $(a, 0)$; $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$;

$(-a, 0)$; $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Să se afle perimetrul triunghiului cu vârfurile în punctele (3, 4), (−2, 4), (2, 2).

R: $5 + 3\sqrt{5}$.

9. Să se afle perimetrul patrulaterului cu vârfurile în punctele (2, 1), (−2, 8), (−6, 5), (−2, −2).

R: $10 + 2\sqrt{65}$.

10. Să se afle perimetrul patrulaterului cu vârfurile în punctele $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$.

R: $4\sqrt{a^2+b^2}$.

11. Să se demonstreze că triunghiul cu vârfurile în punctele (−3, −2), (1, 4), (−5, 0) este isoscel.

12. Să se arate că triunghiul cu vârfurile în punctele (−1, 1), (1, 3), $(-\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$, este echilateral.

13. Să se arate că triunghiul cu vârfurile în punctele (1, 2), (3, 4), (−1, 4) este dreptunghic.

14. Să se arate că punctele (8, 0), (0, −6), (7, −7), (1, 1) se află pe un cerc cu centrul în punctul (4, −3). Să se calculeze raza cercului.

R: 5.

15. Să se afle punctul egal depărtat de punctele (0, 0), (1, 0), (0, 2).

R: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

16. Să se afle punctul egal depărtat de punctele (−4, 3), (4, 2), (1, −1).

R: $\left(\frac{1}{18}, 2\frac{17}{18}\right)$.

17. Să se afle punctul egal depărtat de punctele (1, 3), (0, 6), (−4, 1)

R: $\left(-\frac{73}{34}, \frac{123}{34}\right)$.

18. Să se afle centrul cercului, care trece prin punctele (0, 0), (4, 2), (6, 4).

R: (−3, 11).

19. Să se afle punctul de pe axa Ox, egal depărtat de punctele (0, 5) și (4, 2).

R: $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$.

20. Să se afle punctele situate în același timp, la distanță de 5 unități de lungime de punctul (1, 3) și la 4 unități de axa Oy.

R: (4, 7), (4, −1), (−4, 3).

21. Un punct care se mișcă în linie dreaptă s'a deplasat din punctul A (−3, −2) în punctul B (4, 5). Să se calculeze lungimea drumului parcurs și unghiul de înclinare φ al traiectoriei punctului față de axa absciselor.

R: $AB = \sqrt{98}$, $\varphi = 45°$.

22. Să se determine poziția unui punct, care pornind din punctul (3, 2), s'a deplasat cu 12 unități de lungime pe o dreaptă, care formează un unghi de 60° cu axa absciselor.

R: $[9, 2\ (1 + 3\sqrt{3})]$.

23. Să se afle punctul care împarte în raportul 2 : 3 segmentul determinat de punctele P_1 (−2, 3) și P_2 (4, 6).

R: $\left(\frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Mijlocul unui segment se află în punctul $(-1, 2)$ și una din extremități în punctul $(2, 5)$. Să se afle coordonatele celeilalte extremități a segmentului.

R: $(-4, -1)$.

25. Punctul $(1, 1)$ împarte în părți egale segmentul limitat de punctele $(x, 5)$ și $(-2, y)$. Să se afle cele două puncte.

R: $(4, 5)$, $(-2, -3)$.

26. Să se găsească punctul care împarte segmentul cuprins între punctele $(0, 2)$ și $(8, 0)$ într'un raport egal cu raportul distanțelor acestor puncte la origine.

R: $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

27. Să se împartă segmentul cuprins între punctele $(-3, 4)$ și $(9, 12)$ într'un raport egal cu raportul distanțelor acestor puncte la origine.

R: $(0, 6)$.

28. Două vârfuri ale unui triunghi se află în punctele $A\,(3, 7)$ și $B\,(-2, 5)$ Mijloacele laturilor care trec prin vârful al treilea se află pe axele de coordonate. Să se afle coordonatele vârfului al treilea.

R: $(-3, -5)$ sau $(2, -7)$.

29. Se dau punctele $A\,(1, -1)$ și $B\,(4, 5)$. Să se afle punctul până la care trebue prelungit segmentul AB (în sensul dela A la B), pentru a obține un segment AM a cărui lungime să fie de trei ori mai mare decât lungimea segmentului AB.

R: $(10, 17)$.

30. Să se afle lungimile medianelor AA', BB', CC' ale triunghiului cu vârfurile în punctele $A\,(3, 4)$, $B\,(-1, 1)$, $C\,(0, -3)$.

R: $AA' = \frac{1}{2}\sqrt{149}$, $BB' = \frac{1}{2}\sqrt{26}$, $CC' = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

31. Punctele $P_1\,(1, 2)$, $P_2\,(3, -4)$, $P_2\,(5, 5)$ sunt vârfurile unui triunghi. Să se afle punctul de intersecție al medianelor triunghiului.

R: $(3, 1)$.

32. Să se afle punctele care împart în trei părți egale segmentul cuprins între punctele $M_1\,(-3, -7)$ și $M_2\,(10, 2)$.

R: $\left(\frac{4}{3}, -4\right)$, $\left(\frac{17}{3}, -1\right)$.

33. Vârfurile unui triunghi se află în punctele $(5, 0)$, $(3, -8)$, $(1, -4)$. Să se afle punctele care împart medianele triunghiurilor în trei părți egale.

R: $(3, -4)$, $(4, -2)$, $(3, -6)$, $(2, -4)$.

34. Să se demonstreze, că într'un triunghi dreptunghic lungimea medianei, care unește vârful unghiului drept cu mijlocul ipotenuzei, este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

35. In trapezul $OABC$ laturile paralele OA și CB sunt perpendiculare pe latura OC. Mijlocul laturii AB este în punctul D. Să se demonstreze că $OD = CD$.

36. In punctul $A\,(4, 6)$ se află o greutate de 60 g și în $B\,(-2, 7)$ alta de 40 g. Să se afle coordonatele centrului de greutate al acestui sistem.

R: $(1, 6;\ 6, 4)$.

Scanned with OKEN Scanner

37. In trei puncte, $A(-1, 0)$; $B(-2, 4)$; $C(4, -5)$, se află trei greutăţi de 30, 50 şi 70 g. Să se determine centrul de greutate al sistemului.

R: $(1, -1)$.

Indicaţie. Se va afla mai întâi centrul de greutate M al sistemului format din două puncte oarecare dintre cele date, de exemplu A şi B şi apoi centrul de greutate al sistemului punctelor M şi C.

38. Să se demonstreze că pentru un sistem compus din n puncte $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, în care sunt concentrate în mod corespunzător masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$, coordonatele centrului de greutate se calculează cu ajutorul următoarelor expresii:

$$x = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

39. Ştiut fiind că centrul de greutate al unei plăci triunghiulare omogene se află în punctul de intersecţie al medianelor, să se exprime coordonatele centrului de greutate cu ajutorul coordonatelor vârfurilor plăcii (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3).

R: $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

CAPITOLUL II

LINIA DREAPTĂ

§ 6. Noţiuni despre ecuaţia dreptei. Ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular

1. In capitolul precedent am studiat definirea poziţiei unui punct în plan cu ajutorul numerelor. In afară de aceasta au fost cercetate în acel capitol câteva probleme simple, a căror rezolvare s'a bazat exclusiv pe aplicarea acestei idei.

Metoda coordonatelor îşi găseşte însă aplicarea nu numai în probleme legate de cercetarea poziţiei unor puncte izolate.

Se constată că lărgirea ideii de bază — aceea a determinării poziţiei unui punct în plan cu ajutorul numerelor — dă posibilitatea de a studia prin metode algebrice şi forme geometrice mai complecte şi anume liniile.

Rezolvarea acestei probleme o vom începe prin aplicarea la linia cea mai simplă, adică la dreaptă.

Poziţia unei linii drepte în plan este perfect determinată, dacă se cunosc două puncte situate pe această dreaptă: prin două puncte date trece o singură dreaptă. Pentru determinarea poziţiei unei linii drepte nu este însă neapărat necesar să se cunoască două puncte prin care trece dreapta, ci pot fi date şi alte două condiţii. Printre diferitele moduri de determinare a unei drepte în planul coordonatelor, un mod foarte potrivit pentru studierea dreptei, care este larg folosit în apli-

Scanned with OKEN Scanner

cații este următorul : se definește poziția unei drepte cu ajutorul condițiilor :

1) dreapta taie axa Oy într'un punct, a cărui ordonată este b;

2) ea formează cu axa Ox unghiul φ.

Aceste două condiții definesc o singură dreaptă.

In adevăr putem duce oricâte drepte vrem, care să taie axa Oy în punctul $(0, b)$, însă numai una din ele va forma cu axa Ox unghiul dat φ.

Tot astfel putem duce oricâte drepte dorim care să formeze unghiul φ cu axa Ox; toate aceste drepte vor fi paralele între ele. Dintre ele însă numai una taie axa Oy în punctul cu ordonata egală cu b.

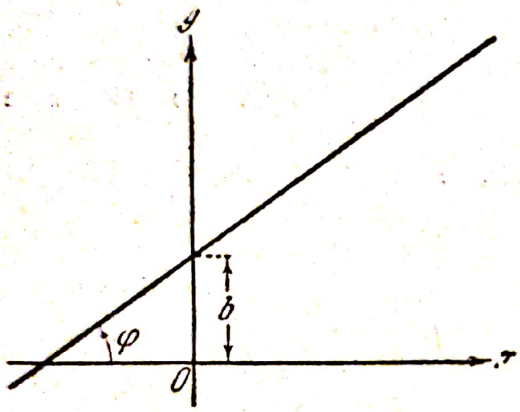

Fig. 11.

Presupunem că ni se dă o dreaptă definită prin condițiile precedente (fig. 11). *Unghiul φ, de înclinare al dreptei față de axa Ox, va fi unghiul format prin rotirea sensului pozitiv al axei Ox în sens invers mișcării acelor de ceasornic, până ce va coincide cu dreapta.*

Să ne imaginăm că dreapta este formată prin mișcarea continuă a unui punct. In timpul mișcării, coordonatele punctului se vor modifica, luând, pentru fiecare poziție determinată a punctului pe dreaptă, valori numerice determinate. Să însemnăm acest punct mobil cu $M(x, y)$. Prin urmare, coordonatele (x, y) se vor modifica pe măsura mișcării punctului M pe dreaptă. Deoarece punctul trebue să se deplaseze rămânând tot timpul pe dreaptă adică trebue să se deplaseze conform unei legi definite prin condiții geometrice, coordonatele (x, y) trebue să varieze și ele conform unei legi determinate.

Astfel, de exemplu, dacă dreapta dată este bisectoarea unghiului format de axele xOy (fig. 12), coordonatele (x, y) ale unui punct M, care se deplasează pe bisectoare, vor varia, însă, pentru orice poziție a punctului M, abscisa x va fi egală cu ordonata y.

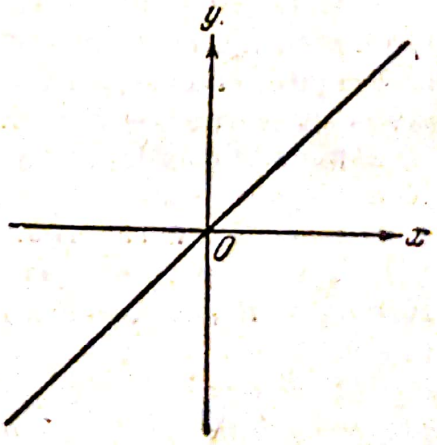

Fig. 12.

Dacă dăm unei coordonate, de exemplu abscisei x, o valoare numerică oarecare, ordonata y va primi o valoare numerică perfect *definită*, corespunzătoare valorii alese pentru x, și anume acea valoare, care corespunde poziției punctului pe dreaptă în acel moment (adică pentru valoarea aleasă a lui x).

Prin urmare, modificarea lui y este condiționată de modificarea lui x, sau, invers, modificând arbitrar pe y, vom avea pentru x o modificare condiționată de modificarea lui y.

Astfel coordonatele variabile sau *coordonatele curente* (x, y), cum le vom numi pe viitor, ale punctului M care se mișcă pe dreaptă trebue să fie legate printr'o relație determinată.

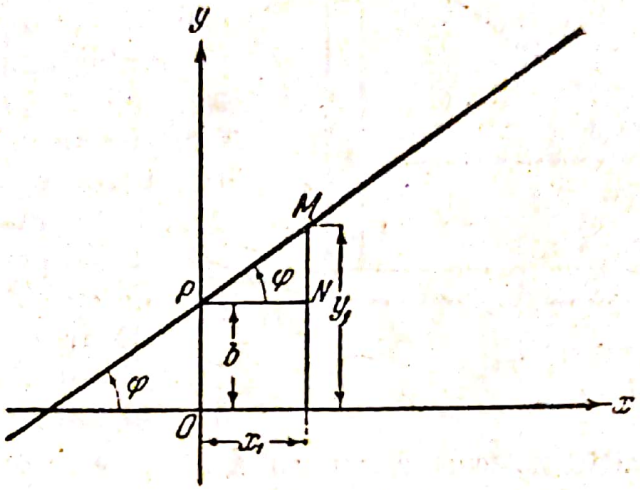

Fig. 13.

Pentru a stabili această relație, să cercetăm o poziție oarecare a punctului M pe dreaptă. Fie (x_1, y_1) valorile numerice ale coordonatelor (x, y) pentru această poziție (fig. 13). Din triunghiul dreptunghic PMN obținem :

$$NM = PN \text{ tg } \varphi,$$

sau, întrucât $NM = y_1 - b$, $PN = x_1$,

$$y_1 - b = kx_1, \qquad (1)$$

unde $k = \text{tg } \varphi$.

Să luăm altă poziție a punctului M. Fie (x_2, y_2) valorile numerice ale coordonatelor (x, y) pentru această nouă poziție a punctului M. Din fig. 14 obținem relația :

$$y_2 - b = kx_2. \qquad (2)$$

Comparând egalitățile (1) și (2), se vede că valorile numerice ale coordonatelor curente (x, y) sunt legate în ambele cazuri *printr'o relație de aceeași formă.*

Dacă se ia pentru punctul M poziția a treia, a patra etc. pe dreaptă, atunci, evident, se vor obține relații de aceeași formă ca și (1) și (2).

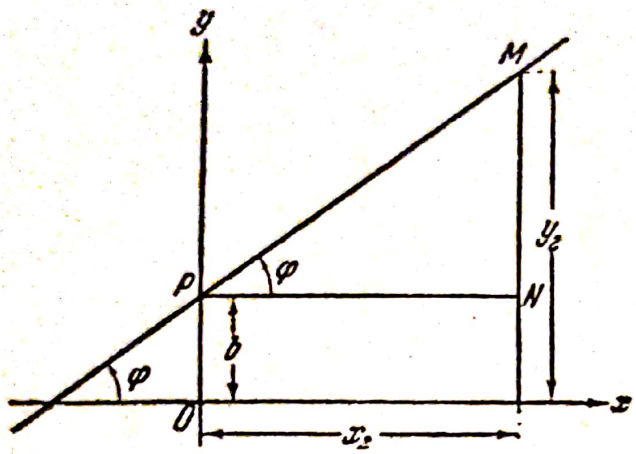

Fig. 14.

Deaceea, pentru a stabili o astfel de relație, comună pentru toate pozițiile punctului M pe dreaptă, ar fi în fond suficient să considerăm numai o singură poziție oarecare a punctului M pe dreaptă. Relația pe care o vom obține în felul acesta va fi *comună* pentru toate pozițiile punctului M, adică comună pentru toate valorile numerice ale coordonatelor curente (x, y).

Deaceea tot raționamentul precedent poate fi rezumat în felul următor:

Se ia o poziție oarecare a punctului M, care se mișcă pe dreaptă (sau, ceeace este același lucru, se ia un punct oarecare M pe dreaptă). Se notează coordonatele acestui punct cu (x, y). Ținând seama de condițiunile geometrice care definesc dreapta, se stabilește relația între x și y.

In cazul dat se obține din fig. 15:

$$y - b = kx,$$

de unde:

$$y = kx + b. \qquad (3)$$

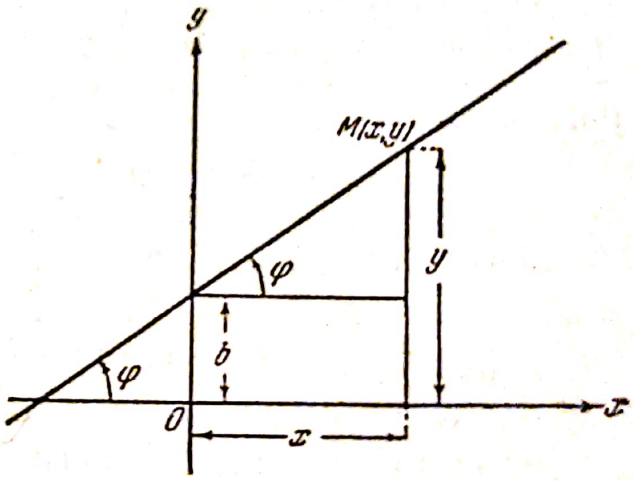

Fig. 15.

Intrucât punctul $M(x, y)$ a fost luat în mod arbitrar pe dreaptă, tot ce s'a spus relativ la acest punct rămâne valabil pentru orice alt punct al dreptei date, adică relația (3) trebue să fie satisfăcută de coordonatele oricărui punct al dreptei.

Din cele spuse rezultă că *dacă se ia pe dreapta dată un punct determinat și se înlocuesc coordonatele curente din relația* (3) *cu coordonatele acestui punct, relația se transformă în identitate.* Se spune că coordonatele unui punct situat pe dreaptă satisfac relația (3).

Fie acum un punct care nu se află pe dreapta dată. Pentru punctul $M_1(x_1, y_1)$, situat deasupra dreptei, se obține din fig. 16 :

$$\frac{y_1 - b}{x_1} > k,$$

de unde $y_1 - b > kx_1$, adică $y_1 \neq kx_1 + b$. Pentru punctul $M_2(x_2, y_2)$ situat sub dreaptă se obține :

$$\frac{y_2 - b}{x_2} < k,$$

de unde $y_2 - b < kx_2$ sau

$$y_2 \neq kx_2 + b.$$

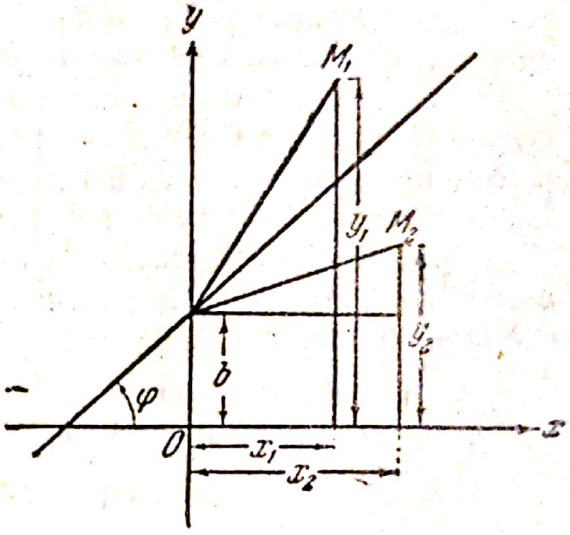

Fig. 16.

Aceasta arată că *coordonatele punctelor care nu sunt situate pe dreaptă nu satisfac ecuația* (3). Relația (3) se numește *ecuația* dreptei.

Prin urmare, *dacă coordonatele unui punct satisfac ecuația dreptei, punctul acesta se află pe dreapta dată. Dacă ele nu satisfac ecuația dreptei, punctul nu se află pe acea dreaptă.*

Deci, pentru a verifica dacă un punct dat se află sau nu pe dreaptă, trebue înlocuite coordonatele curente din ecuația dreptei prin coordonatele punctului.

Dacă ecuația se transformă într'o identitate, punctul se află pe dreaptă ; dacă această înlocuire nu duce la o identitate, punctul nu se află pe dreaptă.

Exemplu. Se dă dreapta $y = 2x + 3$ și punctele $A(-1, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(2, 7)$, $D(0, 2)$, $O(0, 0)$. Să se stabilească care dintre aceste puncte se află pe dreaptă.

Rezolvare. Inlocuind în ecuația dreptei date coordonatele punctului A, adică punând $x = -1$, $y = 1$, se obține :

$$1 = 2(-1) + 3 ; \quad 1 = -2 + 3 ; \quad 1 = 1, \text{ identitate.}$$

Prin urmare punctul A se află pe dreaptă.

Inlocuind în ecuație coordonatele punctului B, se obține :

$$4 \neq 2 \cdot (-3) + 3 ;$$

prin urmare punctul B nu se află pe dreapta dată.

Cercetând în același mod punctele C, D și O, se constată că punctul C se află pe dreapta dată, pe când punctele D și O nu se află pe dreaptă.

2. Să revenim la ecuația (3). Din ecuația (3) se vede că : 1) ea este de gradul întâi în raport cu x și y ; 2) conține coordonatele curente

x şi y, care sunt *mărimi variabile* şi 3) conţine mărimile k şi b, care definesc poziţia dreptei în plan în raport cu sistemul de coordonate ales Oxy, k şi b fiind *mărimi constante.*

Unei anumite drepte îi corespund anumite valori ale mărimilor k şi b şi, invers, fiecărei perechi de valori k şi b îi corespunde o anumită dreaptă. Aceste mărimi poartă denumirea de parametrii ecuaţiei (3) ai dreptei.

Parametrul $k = \operatorname{tg} \varphi$ se numeşte *coeficient unghiular,* iar parametrul b, *ordonata la origine.* Ecuaţia (3) poartă denumirea de *ecuaţie a dreptei cu coeficient unghiular.*

Dacă coeficientul unghiular k este pozitiv, unghiul de înclinare φ al dreptei faţă de axa Ox este ascuţit, deoarece tangenta unui unghi ascuţit este un număr pozitiv; pentru o valoare negativă a lui k unghiul de înclinare al dreptei faţă de axa Ox va fi obtuz.

Din cele expuse rezultă în mod clar că ecuaţia unei drepte este determinată prin valorile parametrilor k şi b şi că *a afla ecuaţia unei drepte înseamnă a afla valorile parametrilor ei.*

Exemplul 1. O dreaptă este înclinată faţă de axa Ox cu un unghi de 30° şi are ordonata la origine egală cu —3. Să se afle ecuaţia dreptei.

Rezolvare. Conform enunţului: $k = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $b = -3$. Substituind în ecuaţia (3) $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $b = -3$, se obţine ecuaţia dreptei căutate:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x - 3.$$

Exemplul 2. Să se afle ecuaţia dreptei care trece prin punctul (2, —5) şi face unghiul de de 45° cu axa Ox.

Rezolvare. Ecuaţia dreptei are forma $y = kx + b$. A afla ecuaţia dreptei, înseamnă a afla valorile parametrilor k şi b, adică a afla două necunoscute, în care scop trebue stabilite două ecuaţii pe baza condiţiilor problemei.

Intrucât se afirmă în problemă că dreapta este înclinată faţă de axa Ox cu un unghi de 45°, se obţine prima ecuaţie:

$$k = \operatorname{tg} 45° = 1,$$

care în cazul nostru este chiar rezolvată.

In afară de aceasta se ştie că dreapta căutată trece prin punctul (2, —5); ceeace înseamnă că şi coordonatele (2, —5) trebue să satisfacă ecuaţia căutată, adică trebue să fie adevărată relaţia:

$$-5 = 2k + b.$$

Astfel am obţinut un sistem de două ecuaţii:

$$\begin{aligned} k &= 1; \\ -5 &= 2k + b \end{aligned}$$

Rezolvându-l, se află $k = 1$, $b = -7$. Prin urmare ecuaţia căutată este $y = x - 7$.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. In loc de a spune „se caută ecuaţia dreptei", se spune adeseori mai scurt „se caută dreapta".

Exemplul 3. Să se deseneze dreapta a cărei ecuaţie este:

$$y = 4x - 3.$$

Rezolvare. Din ecuaţie se vede că ordonata la origine este -3, adică dreapta trece prin punctul $(0, -3)$.

In loc de a construi unghiul a cărui tangentă este egală cu 4 sau de a afla acest unghi din tabele (în care caz s'ar afla numai o valoare aproximativă a unghiului), este mai simplu să se determine pentru construcţia dreptei încă un punct prin care trece dreapta. In acest scop se va da abscisei x o valoare oarecare, de exemplu 2, şi se va determina valoarea corespunzătoare a lui y.

$$y = 4 \cdot 2 - 3 = 5.$$

Construind acum punctele $(0, -3)$, $(2, 5)$ se duce prin ele dreapta căutată (fig. 17).

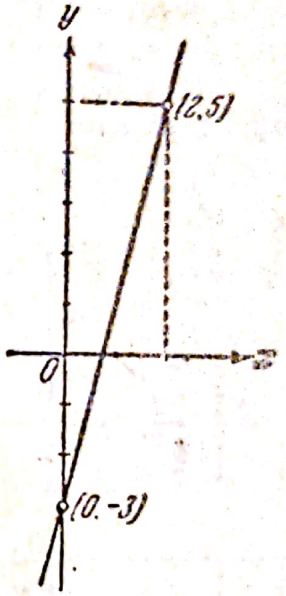

Fig. 17.

§ 7. Ecuaţiile dreptelor paralele cu axele de coordonate; ecuaţiile axelor de coordonate

Cum s'a arătat în § 6, parametrii k şi b ai ecuaţiei dreptei cu coeficient unghiular k:

$$y = kx + b$$

au valori numerice diferite în funcţie de poziţia dreptei în plan. Să cercetăm în speţă o dreaptă paralelă cu axa Ox care taie axa Oy într'un punct cu ordonata egală cu b (fig. 18).

Să se afle ecuaţia acestei drepte.

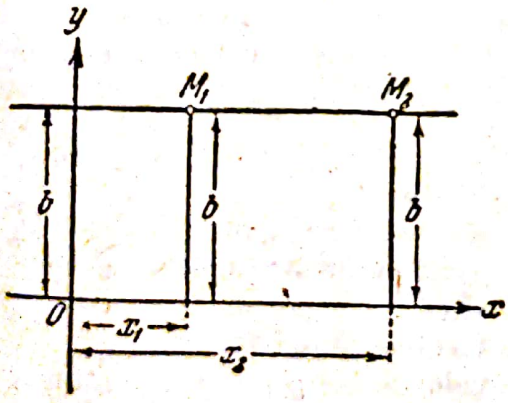

Fig. 18.

Dacă b este un număr pozitiv dreapta se află deasupra axei Ox, iar dacă este un număr negativ dreapta se află dedesubtul axei Ox.

O dreaptă paralelă cu axa Ox formează cu această axă un unghi de $0°$. Deaceea $k = \operatorname{tg} 0° = 0$, ordonata la origine este b. Deci, în cazul considerat, ecuaţia (3) va avea forma:

$$y = 0 \cdot x + b$$

sau, mai simplu,

$$y = b. \qquad (4)$$

Prin urmare ecuaţia (4) reprezintă un mod de a scrie prescurtat ecuaţia $y = 0 \cdot x + b$, iar lipsa termenului care conţine pe x se datoreşte faptului că parametrul k a devenit egal cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Coordonata curentă x este o mărime variabilă şi diferitelor puncte ale dreptei le corespund valori diferite pentru x. Astfel, de exemplu, în punctul M_1 abscisa $x = x_1$, în punctul M_2 abscisa $x = x_2$ şi, în particular, în punctul O abscisa $x = 0$. Ecuaţia (4) arată că pentru toate valorile lui x ordonata y rămâne mereu egală cu numărul b, întrucât $0 \cdot x = 0$ pentru orice valoare a lui x.

Imprejurarea că pentru orice x ordonata y rămâne egală cu b, este caracteristică pentru o dreaptă paralelă cu axa Ox situată la distanţa b de această axă.

Prin urmare, *ecuaţia dreptei paralele cu axa Ox şi care taie axa Oy în punctul* $(0, b)$, *are forma*:

$$y = b. \tag{4}$$

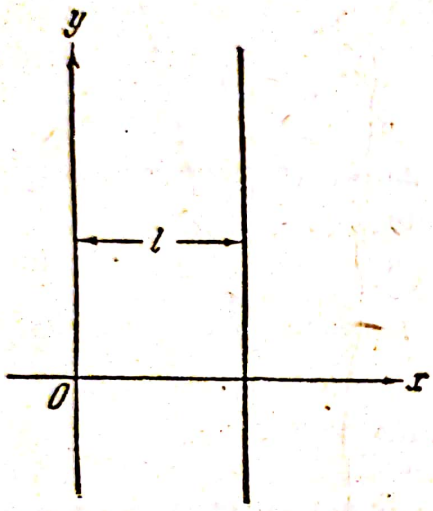

Fig. 19.

In mod analog, *ecuaţia dreptei paralele cu axa Oy şi care taie axa Ox într'un punct a cărui abscisă este egală cu l, are forma*

$$x = l, \tag{5}$$

adică $x = l$ pentru toate valorile lui y (fig. 19), ceeace în acelaşi timp caracterizează o dreaptă paralelă cu axa Oy. Se observă că ecuaţia unei drepte paralele cu axa Oy nu poate fi pusă sub forma (3) întrucât în acest caz $\varphi = 90°$ şi deci $k = \operatorname{tg} \varphi$ nu există; nu există nici b, ordonata la origine.

Dacă micşorăm valorile absolute ale parametrilor b şi l în ecuaţiile (4) şi (5) vom obţine drepte paralele cu axele Ox şi Oy, aflate la distanţe tot mai mici de aceste axe.

In sfârşit, pentru $b = 0$ şi $l = 0$ aceste drepte se vor confunda cu axele Ox şi Oy. In felul acesta *ecuaţia axei Ox are forma*:

$$y = 0 \tag{6}$$

şi *ecuaţia axei Oy are forma*:

$$x = 0. \tag{7}$$

Ecuaţia (6) arată că pentru toate valorile lui x ordonata rămâne egală cu zero.

Aceasta este, evident, chiar proprietatea punctelor Ox.

Ecuaţia (7) arată că pentru toate valorile lui y abscisa x rămâne egală cu zero. Aceasta este chiar proprietatea punctelor axei Oy.

§ 8. Ecuaţia dreptei sub forma ei generală şi în cazuri particulare

In §§ 6 şi 7 au fost cercetate toate poziţiile posibile ale dreptei în raport cu sistemul de coordonate ales Oxy şi s'a stabilit că orice

Scanned with OKEN Scanner

dreaptă se exprimă printr'o ecuaţie de gradul întâi în raport cu coordonatele curente (x, y). Vom demonstra acum că şi reciproca este valabilă :

Orice ecuaţie de gradul întâi în raport cu coordonatele curente

$$Ax + By + C = 0, \tag{8}$$

în care A, B şi C sunt coeficienţi constanţi, reprezintă o linie dreaptă (adică punctele ale căror coordonate satisfac această ecuaţie sunt pe o dreaptă). In adevăr presupunând că coeficientul $B \neq 0$*) rezolvăm ecuaţia (8) în raport cu y. Obţinem :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{8*}$$

Să cercetăm acum dreapta care are coeficientul unghiular k egal cu $-\frac{A}{B}$ şi ordonata la origine b egală cu $-\frac{C}{B}$. Precum ştim, această dreaptă se exprimă prin ecuaţia :

$$y = kx + b;$$

adică prin ecuaţia (8*) :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Prin urmare, ecuaţia (8*) exprimă o dreaptă ; şi întrucât această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia (8), înseamnă că şi ecuaţia (8) exprimă o dreaptă.

Să analizăm acum cazul $B = 0$. In cazul acesta ecuaţia (8) ia forma : $Ax + C = 0$ sau $x = -\frac{C}{A}$.

Inlocuind $-\frac{C}{A}$ prin l, se obţine ecuaţia (5) :

$$x = l,$$

adică, conform § 7, ecuaţia unei drepte paralele cu axa Oy.

Deci ecuaţia (8) poate fi transformată pentru orice valoare a coeficienţilor în una din ecuaţiile liniei drepte cercetate anterior.

In consecinţă *orice ecuaţie de gradul întâi în raport cu ordonatele curente x şi y reprezintă o linie dreaptă.*

Ecuaţia (8) se numeşte *ecuaţia generală a dreptei.*

Să cercetăm mai amănunţit câteva cazuri particulare ale ecuaţiei (8) :

I. $C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0.$

*) Această condiţie este necesară, fiindcă rezolvând ecuaţia (8) în raport cu y, urmează să împărţim prin B, iar prin 0 nu se poate împărţi.

Ecuaţia (8) capătă forma :

$$Ax + By = 0. \tag{9}$$

Coordonatele punctului (0, 0) adică originea satisfac ecuaţia (9). Prin urmare *dacă în ecuaţia unei drepte lipseşte termenul liber, atunci dreapta trece prin origine.*

II. $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0.$

Ecuaţia (8) capătă forma : $By + C = 0$ sau

$$y = -\frac{C}{B}. \tag{10}$$

Inlocuind $-\frac{C}{B} = b$ se obţine ecuaţia (4) :

$$y = b,$$

care este ecuaţia unei drepte paralele cu axa Ox (vezi § 7).

Deci, pentru $A = 0$, *ecuaţia* (8) *reprezintă o dreaptă paralelă cu axa* Ox.

III. $B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0.$

Cum s'a văzut, în cazul acesta ecuaţia (8) capătă forma :

$Ax + C = 0$ sau $x = -\frac{C}{A}$, sau mai scurt,

$$x = l$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy.

Astfel dacă $B = 0$, *ecuaţia* (8) *reprezintă o dreaptă paralelă cu axa* Oy.

Deci, dacă în ecuaţia unei drepte lipseşte termenul care conţine pe x, dreapta este paralelă cu axa Ox.

Dacă în ecuaţia unei drepte lipseşte termenul care conţine pe y, dreapta este paralelă cu axa Oy.

IV. $A = 0,\ C = 0,\ B \neq 0.$

Ecuaţia (8) capătă forma : $By = 0$ sau :

$$y = 0,$$

ceeace reprezintă ecuaţia axei Ox, cum am văzut în § 7.

V. $B = 0,\ C = 0,\ A \neq 0.$

Ecuaţia (8) capătă forma : $Ax = 0$ sau :

$$x = 0,$$

ceeace reprezintă ecuaţia axei Oy, cum am văzut în § 7.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. Dreapta $3x + 5y = 0$ trece prin origine, întrucât în ecuaţia dată termenul liber este egal cu zero.

Dreapta $2x - 5 = 0$ este paralelă cu axa Oy, întrucât în această ecuaţie lipseşte termenul care conţine pe y.

Ecuaţia $3x = 0$ poate fi adusă la forma $x = 0$ şi prin urmare, este ecuaţia axei Oy.

Exemplul 2. Să se construiască dreapta dată prin ecuaţia

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Rezolvare. Se află întâi două puncte situate pe dreaptă. In acest scop se dau abscisei x succesiv două valori numerice oarecare şi se calculează valorile corespunzătoare pentru y. Fie de exemplu $x = 1$. Se găseşte pentru y valoarea $y=2$. Se ia acum $x = -3$ şi se obţine $y=5$. Astfel, s'au aflat două puncte $(1, 2)$ şi $(-3, 5)$ situate pe dreaptă. Construind aceste puncte se duce prin ele dreapta căutată (fig. 20).

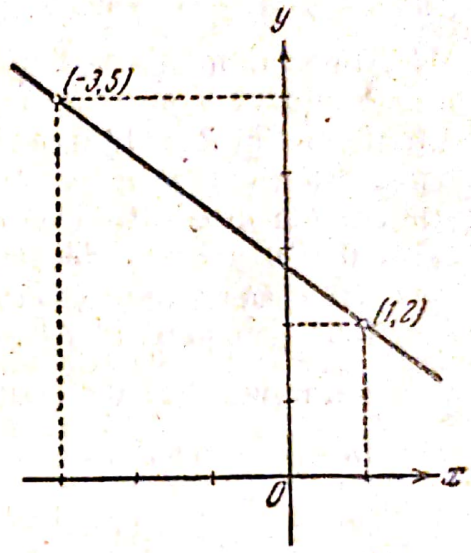

Fig. 20.

§ 9. Ecuaţia unei drepte care trece printr'un punct dat (ecuaţia unui fascicol de drepte)

Se dă punctul $M(x_1, y_1)$. Se cere să se afle ecuaţia unei drepte care trece prin acest punct. Se scrie ecuaţia căutată sub forma (3):

$$y = kx + b,$$

unde k şi b sunt coeficienţi care trebue determinaţi.

Problema conţine numai o singură condiţie: ca dreapta să treacă prin punctul dat; se ştie însă că o singură condiţie nu este suficientă pentru a determina cei doi coeficienţi necunoscuţi. Evident, în acest caz se poate exprima numai unul dintre coeficienţi prin celălalt şi se va ajunge în felul acesta la o ecuaţie care va conţine un coeficient arbitrar, adică un coeficient care poate primi orice valoare numerică. De aici rezultă că se va obţine o ecuaţie care nu va exprima o singură dreaptă determinată, ci o mulţime infinită de drepte. Acest lucru nu este în contradicţie cu enunţul problemei, întrucât printr'un punct dat trece un număr infinit de drepte.

Să trecem la rezolvarea problemei:

Deoarece punctul $M(x_1, y_1)$ se află pe dreaptă, coordonatele (x_1, y_1) trebue să satisfacă ecuaţia (3), adică:

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Din această egalitate se scoate parametrul b în funcție de k:

$$b = y_1 - kx_1.$$

Inlocuind acum expresia obținută pentru coeficientul b în ecuația (3) se obține:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

sau:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{11}$$

In ecuația aceasta mărimea coeficientului unghiular k rămâne nedeterminată și deaceea el poate primi valori diferite. Pentru valori diferite ale lui k se obțin ecuațiile unor drepte diferite. Insă toate dreptele acestea trec prin punctul $M(x_1, y_1)$, deoarece înlocuind coordonatele curente în ecuația (11) prin coordonatele (x_1, y_1), se obține identitatea $0 = 0$ pentru orice valoare a lui k.

Deaceea se spune că ecuația (11) este ecuația fascicolului de drepte care trec prin punctul dat.

Exemplu. Să se afle ecuația fascicolului de drepte, care trec prin punctul $(-3, 5)$.

Rezolvare. Inlocuind în ecuația (11) $x_1 = -3$, $y_1 = 5$, se obține:

$$y - 5 = k(x + 3),$$

adică ecuația fascicolului căutat, în care k rămâne nedeterminat.

§ 10. Ecuația unei drepte care trece prin două puncte date

Fie date punctele: $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Se cere ecuația dreptei care trece prin aceste puncte.

Pentru aceasta se scrie întâi ecuația fascicolului de drepte care trec prin unul din punctele date, de exemplu, prin punctul $M_1(x_1, y_1)$.

Această ecuație are forma (11):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Dreapta căutată este una dintre dreptele fascicolului (11) și anume dreapta care trece prin punctul $M_2(x_2, y_2)$. Aceasta înseamnă că pentru ecuația căutată mărimea k din ecuația (11) trebue să aibă o valoare determinată, și anume o astfel de valoare, încât ecuația (11) să fie satisfăcută de coordonatele (x_2, y_2) ale punctului M_2. Inlocuind în ecuația (11) coordonatele (x_2, y_2), în locul coordonatelor curente se află valoarea căutată a lui k și anume:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, ecuația căutată va fi ecuația :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

sau :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (12)$$

Exemplul 1. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctele (1, 2) și (−3, 5).

Rezolvare. Înlocuind în ecuația (12) $x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $x_2 = -3$; $y_2 = 5$, obținem :

$$\frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{x - 1}{-3 - 1},$$

sau

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Pentru a verifica exactitatea soluției, se înlocuesc în ecuația obținută coordonatele curente prin coordonatele punctelor date. Dacă se vor obține identități ca rezultat al înlocuirilor, problema a fost bine rezolvată.

Făcând verificarea, se găsește :

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 11 = 0 \quad \text{sau } 0 = 0. \\ 3\cdot(-3) + 4\cdot 5 - 11 = 0 \text{ sau } 0 = 0. \end{array}\right\} \text{identități.}$$

Deci problema a fost bine rezolvată.

Exemplul 2. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctele $M_1(3, -2)$ și $M_2(3, 7)$.

Rezolvare. Aplicând ecuația (12), se obține relația :

$$\frac{y + 2}{7 + 2} = \frac{x - 3}{3 - 3},$$

adică

$$\frac{y + 2}{9} = \frac{x - 3}{0}.$$

Însă împărțirea prin 0 este lipsită de sens. Rezultă că folosirea ecuației (12) nu este posibilă pentru rezolvarea problemei date. Unul dintre numitorii ecuației (12) s'a anulat, fiindcă punctele M_1 și M_2 au abscise identice.

Acest fapt arată că dreapta care trece prin ele este paralelă cu axa ordonatelor. Deaceea pentru rezolvarea problemei nu trebue folosită ecuația (12), ci ecuația (5) a dreptei paralele cu axa Oy (vezi § 7), adică ecuația de forma :

$$x = l.$$

Aici $l = 3$ și prin urmare, ecuația căutată va fi :

$$x = 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 11. Ecuaţia unei drepte prin tăieturi

Prin această denumire se înţelege ecuaţia care se obţine în cazul când poziţia dreptei este definită prin punctele $(a, 0)$ şi $(0, b)$, adică prin punctele în care dreapta taie respectiv axele Ox şi Oy.

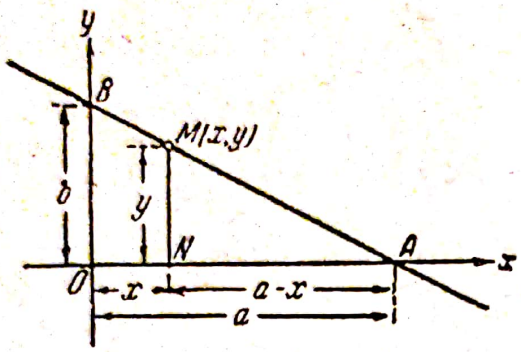

Fig. 21.

Conform fig. 21 (pentru simplificare a şi b au fost considerate pozitive), din asemănarea trunghiurilor NMA şi OBA se scoate :

$$\frac{NM}{OB} = \frac{NA}{OA}.$$

Intrucât $NM = y$, $OB = b$, $NA = a - x$, $OA = a$, proporţia aceasta poate fi scrisă astfel :

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a},$$

de unde se obţine :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{13}$$

Aceasta este forma finală a ecuaţiei dreptei prin tăieturi.

Exemplu. Să se afle ecuaţia dreptei care taie axa Ox în punctul $(5, 0)$ şi axa Oy în punctul $(0, -3)$.

Rezolvare. Punând în ecuaţia (13) $a = 5, b = -3$, obţinem ecuaţia :

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1 \text{ sau } 3x - 5y - 15 = 0.$$

§ 12. Unghiul format de două drepte

1. Fie două drepte care se intersectează (AB) şi (CD) (fig. 22), date prin ecuaţiile :

$$y = k_1 x + b_1, \quad (AB)$$
$$y = k_2 x + b_2. \quad (CD)$$

Vom presupune că aceste drepte nu sunt perpendiculare între ele. La intersecţia lor în punctul P, ele formează două unghiuri : unghiul ascuţit $\measuredangle BPD = \alpha$ şi unghiul obtuz $\measuredangle DPA = 180° - \alpha$.

In unele cazuri trebue găsit anume unul dintre aceste două unghiuri.

Deaceea se distinge unghiul format de dreapta (CD) cu dreapta (AB) de unghiul format de dreapta (AB) cu dreapta (CD).

Deosebirea între cele două unghiuri se stabileşte în felul următor: *se înţelege prin unghiul format de dreapta* (CD) *cu dreapta* (AB), *unghiul cu care trebue rotită dreapta* (AB) *în jurul punctului* P, *în sens pozitiv* (adică opus mişcării acelor de ceasornic) *pentru ca ea să coincidă cu dreapta* (CD).

In fig. 22 acesta este unghiul $\measuredangle BPD = \alpha$.

In mod analog se defineşte unghiul între dreapta (AB) şi dreapta (CD). (In cazul figurii 22 este unghiul $\measuredangle DPA = 180° - \alpha$).

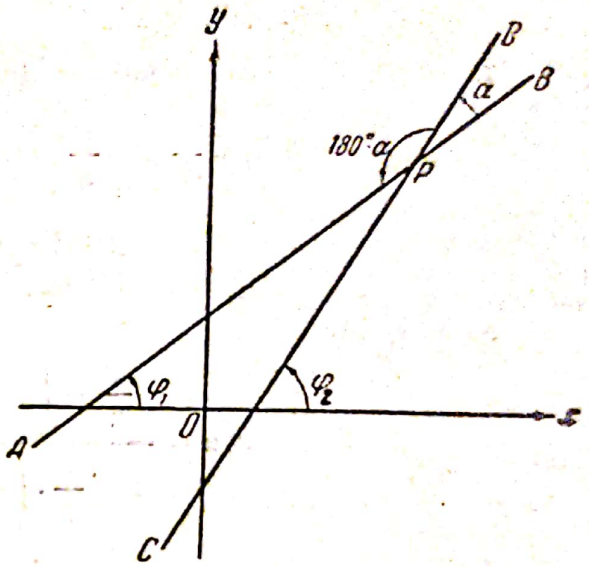

Fig. 22.

2. Trecem acum la problema determinării unghiului α dintre dreapta (CD) şi dreapta (AB), date fiind ecuaţiile acestor drepte.

Să presupunem că dreapta (AB) formează cu axa Ox unghiul φ_1, iar dreapta CD unghiul φ_2. Din fig. 22 se scoate: $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$, de unde

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Insă, $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$ (§ 6). Prin urmare obţinem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (14)$$

Să deducem acum formula, care determină tangenta unghiului format de dreapta (AB) cu dreapta (CD). Să însemnăm acest unghi cu β. Vom avea:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

sau

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \qquad (14^*)$$

Formulele (14) şi (14*) se deosebesc numai prin semnul lor. Se observă că la numărătorii acestor formule se scade coeficientul unghiular al acelei drepte, prin rotirea căreia (în sens pozitiv) până la confundarea cu cealaltă dreaptă se formează unghiul definit prin formula respectivă.

Dacă nu se indică în problemă, care anume dintre cele două unghiuri trebue aflat, atunci, desigur, devine indiferent care coeficient unghiular urmează să fie scăzut.

Să explicăm prin exemple cele expuse.

Exemplul 1. Să se afle unghiul format de dreptele:

$$2x - 3y + 5 = 0 \quad \text{și} \quad x + 2y + 2 = 0.$$

Rezolvare. Rezolvând fiecare ecuație în raport cu y, se găsește:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}; \quad y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Neexistând în problemă nicio indicație, dacă trebue găsit unghiul format de prima dreaptă cu a doua sau invers, este indiferent care coeficient unghiular va fi luat drept scăzător.

Astfel se poate scrie:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{4}$$

de unde $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{4}$.

Exemplul 2. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(-2, 0)$ și formează unghiul $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ cu dreapta

$$3x + 4y + 6 = 0.$$

Rezolvare. Pentru aflarea ecuației căutate se folosește forma (11) a ecuației dreptei care trece printr'un punct dat:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Deoarece în exemplul nostru $x_1 = -2$, $y_1 = 0$, înlocuind aceste valori în ecuație se obține:

$$y = k(x + 2).$$

Pentru aflarea lui k se observă că în exemplul dat este vorba de unghiul pe care dreapta căutată îl face cu cea dată. Deaceea urmează să se ia drept scăzător coeficientul unghiular al dreptei date.

Coeficientul unghiular al dreptei date se află din ecuația ei: el este egal cu $-\frac{3}{4}$. Deci:

$$\frac{2}{3} = \frac{k - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + k\left(-\frac{3}{4}\right)},$$

de unde $k = -\frac{1}{18}$. Prin urmare, ecuația căutată va fi:

$$y = -\frac{1}{18}(x + 2),$$

sau $x + 18y + 2 = 0$.

Dacă s'ar fi cerut să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(-2, 0)$ și cu care dreapta: $3x + 4y + 6 = 0$ formează unghiul arctg $\frac{2}{3}$, atunci pentru determinarea coeficientului unghiular s'ar fi folosit ecuația:

$$\frac{2}{3} = \frac{-\frac{3}{4} - k}{1 - \frac{3}{4}k},$$

de unde $k = -\frac{17}{6}$ și prin urmare ecuația căutată este:

$$y = -\frac{17}{6}(x + 2),$$

sau

$$17x + 6y + 34 = 0.$$

§ 13. Condițiile de paralelism și de perpendicularitate a două drepte

1. Condiția de paralelism

Dacă dreptele sunt paralele, ele formează cu axa Ox unghiuri egale. Deaceea coeficienții unghiulari ai dreptelor k_1 și k_2 sunt egali ($k_1 = k_2$). Invers, dacă $k_1 = k_2$, atunci unghiurile de înclinare ale dreptelor față de axa Ox sunt egale, de unde rezultă că dreptele date sunt paralele.

Deci, *egalitatea coeficienților unghiulari este condiția pentru ca două drepte să fie paralele*:

$$k_1 = k_2. \tag{15}$$

Observație. La stabilirea condiției de paralelism a două drepte nu s'au folosit formulele (14) și (14*) demonstrate în paragraful precedent, fiindcă aceste formule au fost deduse în ipoteza că dreptele se intersectează.

Totuși se vede imediat că aceste formule rămân valabile și în cazul când dreptele (AB) și (CD) sunt paralele.

In adevăr, unghiul α între două drepte paralele trebue considerat egal cu 0° (sau 180°). Atunci $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Pe de altă parte, din

condiția de paralelism, adică din egalitatea $k_2 = k_1$, rezultă că $k_2 - k_1 = 0$, ceeace dă [formula (14)] :

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0.$$

2. Condiția de perpendicularitate

Formula (14) determină prin $\operatorname{tg}\alpha$, unghiul α, format de două drepte care se intersectează.

Dacă $\alpha = 90°$, această formulă nu este aplicabilă, întrucât $\operatorname{tg} 90°$ nu există. Tocmai din această cauză am presupus, la deducerea formulei (14), că dreptele date se întretaie după un unghi, diferit de un unghi drept.

Dacă dreptele sunt perpendiculare între ele, atunci din (fig. 23) obținem direct :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90°,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + 90°) = -\operatorname{ctg}\varphi_1,$$

sau

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Prin urmare, înlocuind $\operatorname{tg}\varphi_1$ și $\operatorname{tg}\varphi_2$ prin k_1 și k_2, aflăm

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

sau

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

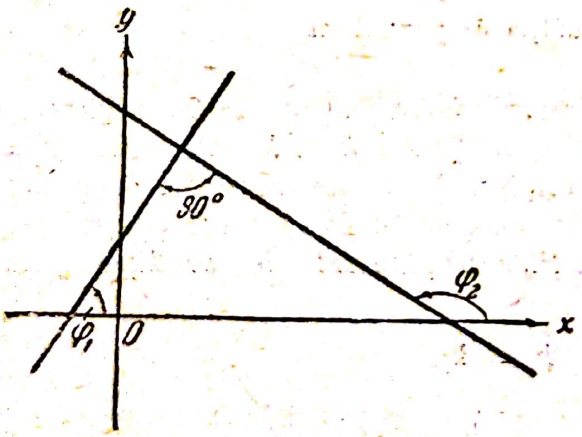

Fig. 23.

Invers, fie $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Aceasta înseamnă, că

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1},$$

sau

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{ctg}\varphi_1,$$

sau

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + 90°),$$

de unde obținem :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90°.$$

Prin urmare unghiul între cele două drepte este de 90°, adică dreptele sunt perpendiculare.

În concluzie, *condiția de perpendicularitate a două drepte este următoarea: coeficienții unghiulari ai acestor drepte trebuie să aibă mărimile inverse una alteia și semnele contrare:*

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{16}$$

Exemplul 1. Să se afle ecuația dreptei paralele cu dreapta $3x-5y+6=0$ și care trece prin punctul $(-2, 3)$.

Rezolvare. Ecuația fascicolului de drepte care trec prin punctul $(-2, 3)$ [formula (11)] este:

$$y-3 = k(x+2).$$

Întrucât dreapta căutată este paralelă cu dreapta $3x-5y+6=0$, coeficientul unghiular al dreptei căutate va fi egal cu coeficientul unghiular al dreptei date, adică egal cu $\frac{3}{5}$; punând în ecuația fascicolului $k=\frac{3}{5}$, se obține ecuația cerută:

$$y-3 = \frac{3}{5}(x+2),$$

sau

$$3x-5y+21=0.$$

Exemplul 2. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(5, 3)$ și este perpendiculară pe dreapta $7x+9y+1=0$.

Rezolvare. Coeficientul unghiular al dreptei date este $-\frac{7}{9}$. Prin urmare, în baza condiției (16), coeficientul unghiular al dreptei căutate este $\frac{9}{7}$.

Scriind ecuația fascicolului de drepte care trec prin punctul $(5, 3)$ conform formulei (11) și punând:

$$k=\frac{9}{7},$$

se obține ecuația cerută:

$$y-3 = \frac{9}{7}(x-5)$$

sau

$$9x-7y-24=0.$$

§ 14. Intersecția a două drepte

Două drepte sunt date prin ecuațiile lor:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Să se afle coordonatele punctului de intersecție al acestor drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece punctul de intersecţie se află în acelaşi timp pe ambele drepte, coordonatele acestui punct trebue să satisfacă simultan ambele ecuaţii date.

Prin urmare, pentru a afla coordonatele punctului căutat, *trebue rezolvate ecuaţiile dreptelor date, în raport cu x şi y.*

Exemplul 1. Să se afle punctul de intersecţie al dreptelor:

$$5x - y - 7 = 0, \qquad 3x + 2y - 12 = 0.$$

Rezolvare. Inmulţind prima ecuaţie cu 2 şi adunând ecuaţiile membru cu membru, obţinem:

$13x - 26 = 0$, de unde $x = 2$. Inlocuind valoarea aflată pentru x în prima ecuaţie, se găseşte $y = 3$. Deci, punctul căutat este (2, 3).

Exemplul 2. Să se afle punctul de intersecţie al dreptelor:

$$3x + 4y - 2 = 0, \qquad 6x + 8y + 7 = 0.$$

Rezolvare. Sistemul dat este incompatibil şi deaceea nu are soluţie.

Acest fapt se explică uşor din punct de vedere geometric: coeficienţii unghiulari ai dreptelor, exprimate prin ecuaţiile date, sunt egali, adică avem cazul unor drepte paralele şi deaceea nu există un punct de intersecţie al acestor drepte.

Exemplul 3. Să se afle punctul de intersecţie al dreptelor:

$$2x - y + 1 = 0, \qquad 6x - 3y + 3 = 0.$$

Rezolvare. Se vede imediat că prin simplificarea tuturor termenilor ecuaţiei a doua prin 3, această ecuaţie se reduce la prima.

In felul acesta sistemul se reduce la o singură ecuaţie şi deaceea are un număr infinit de soluţii: dacă se dau uneia din necunoscutele x sau y valori arbitrare şi se calculează valorile corespunzătoare ale celeilalte necunoscute, se obţin oricâte soluţii ale sistemului de ecuaţii dat.

Din punct de vedere geometric acest lucru se explică prin aceea că cele două drepte date se confundă şi deci se intersectează într'un număr infinit de puncte.

Un astfel de sistem se numeşte nedeterminat.

Exerciţii

1. Să se verifice dacă dreapta:

$$y = 3x + 13$$

trece prin punctele: a) (5, —1); b) (—4, 1); c) (3, 2); d) (5, 7); e) (—5, —2).

2. Să se verifice dacă dreapta:

$$3x - 4y + 11 = 0$$

trece prin punctele: a) (3, 5); b) $(\frac{1}{2}, -1)$; c) (2, —4); d) (—1, 2).

3. Să se deseneze dreptele date prin ecuaţiile următoare:

a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = \frac{1}{2}x$; d) $y = 2x + 3$;

e) $y = -x$; f) $y = -2x$; g) $y = -\frac{1}{2}x$; h) $y = -2x - 3$; i) $2x + 3y - 4 = 0$;

j) $2x - 3y - 4 = 0$; l) $3x + 2 = 0$; m) $3y - 5 = 0$; n) $2x + 3y = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se afle ecuația dreptei care formează cu axa Ox un unghi de 30° și intersectează axa Oy în punctul (0, 3).

R: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$.

5. Să se afle ecuația dreptei care formează cu axa Ox un unghi de 60° și intersectează axa Oy în punctul (0, —4).

R: $y = \sqrt{3}x - 4$.

6. Să se afle ecuația dreptei care formează cu axa Ox un unghi de 120° și intersectează axa Oy în punctul (0, 5).

R: $y = -\sqrt{3}x + 5$.

7. Să se afle ecuația dreptei paralele cu axa Ox, care intersectează axa Oy în punctul (0, 3).

R: $y = 3$.

8. Să se afle ecuația dreptei paralele cu axa Oy, care se intersectează cu axa Ox în punctul (—5, 0).

R: $x = -5$.

9. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul (1, —3) și formează cu axa Ox unghiul arctg 2.

R: $2x - y - 5 = 0$.

10. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ și formează cu axa Ox unghiul arctg (— 2).

R: $4x + 2y + 5 = 0$.

11. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ și formează cu axa Ox un unghi de 0°.

R: $y = -\frac{5}{3}$.

12. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și este paralelă cu axa Oy.

R: $x = \frac{1}{3}$.

13. Să se afle coeficienții unghiulari ai dreptelor:

a) $x - y - 5 = 0$; b) $6x - 3y + 7 = 0$; c) $3x + 2y - 1 = 0$.

R: a) 1; b) 2; c) $-\frac{3}{2}$.

14. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctele (—1, —4) și (0, 5).

R: $9x - y + 5 = 0$.

15. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctele $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ și $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$.

R: $x + 4y = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

16. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctele $(2, -1)$ și $(2, 3)$.

R: $x = 2$.

17. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(5, -1)$ și are coeficientul unghiular al dreptei care unește punctele $(0, 3)$ și $(2, 0)$.

R: $3x + 2y - 13 = 0$.

18. Să se afle ecuația dreptei care taie axa Ox în punctul $(3, 0)$, iar axa Oy în punctul $(0, -4)$.

R: $4x - 3y - 12 = 0$.

19. Să se afle punctele de intersecție ale dreptei $6x - 4y - 3 = 0$ cu axele de coordonate.

R: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

20. Diagonalele unui romb având lungimile de 12 și 8 unități au fost luate drept axe de coordonate. Să se afle ecuațiile laturilor acestui romb.

R: $2x + 3y - 12 = 0$; $2x - 3y + 12 = 0$; $2x + 3y + 12 = 0$; $2x - 3y - 12 = 0$;

sau

$3x + 2y - 12 = 0$; $3x - 2y + 12 = 0$; $3x + 2y + 12 = 0$, $3x - 2y - 12 = 0$.

21. Să se afle aria triunghiului format de axele de coordonate și dreapta $3x + 4y - 12 = 0$.

R: 6 unități pătrate.

22. Ce relație trebue să existe între coeficienții a și b, pentru ca dreapta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

să formeze cu axa Ox un unghi de: a) 45°; b) 60°; c) 135°?

R: a) $a = -b$; b) $a = -\frac{b\sqrt{3}}{3}$; c) $a = b$.

23. Să se afle unghiul ascuțit format de dreptele $3x - y + 6 = 0$ și $x - y + 4 = 0$.

R: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

24. Să se afle unghiul ascuțit format de dreptele $2x - y + 3 = 0$ și $2x + 5y - 4 = 0$.

R: $\operatorname{arctg} 12$.

25. Să se afle unghiul ascuțit format de dreapta $2x - 3y + 6 = 0$ și dreapta care trece prin punctele $(4, -5)$ și $(-3, 2)$.

R: $\operatorname{arctg} 5$.

26. Să se afle unghiul între dreptele care trec prin origine și prin punctele care împart în trei părți egale segmentul dreptei $2x + 3y - 12 = 0$, cuprins între axele de coordonate.

R: $\operatorname{arctg} \frac{9}{13}$.

27. Să se verifice că dreapta $x - y + 3 = 0$ este bisectoarea unuia din unghiurile formate de dreptele $4x - 3y + 11 = 0$ și $3x - 4y + 10 = 0$.

28. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(2, -3)$ și este paralelă cu dreapta $3x - 2y + 2 = 0$.

R: $3x - 2y - 12 = 0$.

29. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ și este paralelă cu dreapta $3x - 2y + 2 = 0$.

R: $6x - 4y + 1 = 0$.

30. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(-1, -1)$ și este paralelă cu dreapta care trece prin punctele $(-2, 6)$ și $(2, 1)$.

R: $5x + 4y + 9 = 0$.

31. Să se afle ecuația dreptei care trece prin origine și este perpendiculară pe dreapta $3x + 4y - 2 = 0$.

R: $4x - 3y = 0$.

32. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(2, -3)$ și este perpendiculară pe dreapta $7x - 4y + 3 = 0$.

R: $4x + 7y + 13 = 0$.

33. Să se afle ecuația perpendicularei ridicate pe mijlocul segmentului care unește punctele $(-5, -1)$ și $(-3, 4)$.

R: $4x + 10y + 1 = 0$.

34. Să se afle ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta $2x - 3y + 7 = 0$ și care trece prin mijlocul segmentului dreptei date, cuprins între axele de coordonate.

R: $36x + 24y + 35 = 0$.

35. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(4, -3)$ și formează un unghi de $45°$ cu dreapta $3x + 4y = 0$.

R: $7x + y - 25 = 0$.

36. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $(-1, -1)$ și formează unghiul $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ cu dreapta $3x + 2y - 6 = 0$.

R: $8x + y + 9 = 0$.

37. Să se afle ecuațiile celor două perpendiculare pe dreapta $y = 3x + 1$, ridicate în punctele de intersecție ale dreptei cu axele de coordonate.

R: $3x + 9y + 1 = 0$; $x + 3y - 3 = 0$.

38. Să se afle dreapta care trece prin punctul $(3, -5)$ și formează cu axa Ox un unghi de două ori mai mare decât unghiul format de dreapta $x - 2y - 5 = 0$ cu aceeași axă.

R: $4x - 3y - 27 = 0$.

39. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ și prin punctul de intersecție al dreptelor $3x - 5y - 11 = 0$ și $4x + y - 7 = 0$.

R: $11x + 4y - 18 = 0$.

40. Să se afle ecuaţia dreptei care trece prin punctele de intersecţie ale dreptelor:

$$2x - y - 1 = 0, \quad x - y + 7 = 0$$

şi

$$x - 7y - 1 = 0, \quad 2x - 5y + 1 = 0.$$

R: $23x - 14y + 26 = 0$.

41. Să se afle ecuaţia dreptei care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor $x - 3y + 2 = 0$ şi $5x + 6y - 4 = 0$ şi este paralelă cu dreapta $4x + y + 7 = 0$.

R: $12x + 3y - 2 = 0$.

42. Să se afle ecuaţia dreptei care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor $3x - y + 4 = 0$, $4x - 6y + 3 = 0$ şi este perpendiculară pe dreapta $5x + 2y + 6 = 0$.

R: $4x - 10y + 1 = 0$.

43. Să se afle ecuaţiile medianelor triunghiului format de dreptele

$$2x - 3y + 11 = 0, \; 3x + y - 11 = 0 \text{ şi } x + 4y = 0.$$

R: $5x - 2y = 0$; $4x + 5y - 11 = 0$; $x - 7y + 11 = 0$.

44. Să se afle ecuaţia dreptei care trece prin origine şi prin punctul de intersecţie al medianelor triunghiului, ale cărui laturi au ecuaţiile:

$$4x - y + 4 = 0, \; y = -x + 4, \; x - 4y + 1 = 0.$$

R: $5x - 2y = 0$.

45. Să se afle piciorul perpendicularei coborîtă din punctul $(-1, 2)$ pe dreapta $3x - 5y - 21 = 0$.

R: $(2, -3)$.

46. Să se afle ecuaţia perpendicularei pe dreapta care trece prin punctele $M_1(-4, 6)$ şi $M_2(4, -1)$, perpendiculară care intersectează această dreaptă într'un punct situat pe segmentul M_1M_2, la o distanţă de punctul M_1, egală cu $\frac{1}{3}$ din lungimea segmentului M_1M_2.

R: $24x - 21y + 109 = 0$.

47. Să se afle distanţa dela punctul $(2, 1)$ la dreapta $3x - y + 7 = 0$.

R: $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

48. Să se afle distanţa dela punctul $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ la dreapta $x + 2y - 4 = 0$.

R: $\sqrt{5}$.

49. Să se afle distanţa dintre dreptele paralele:

$$2x + 3y - 8 = 0 \quad \text{şi} \quad 2x + 3y - 10 = 0.$$

R: $\frac{2}{13}\sqrt{13}$.

50. Segmentul mărginit de punctele M_1 (—3, 1) și M_2 (5, —1) este baza unui triunghi. Să se afle lungimea înălțimii coborîte din vârful al treilea M_3 (6, 5) pe bază.

R: $\frac{25}{17}\sqrt{17}$.

51. Să se determine valoarea coeficientului m, astfel ca dreapta $y = mx+3$ să treacă prin punctul de intersecție al dreptelor $2x - y + 1 = 0$ și $y = x + 5$.

R: $\frac{3}{2}$.

52. Din punctul (9, 5) au fost coborîte trei perpendiculare pe laturile unui triunghi cu vârfurile în punctele (8, 8), (0, 8), (4, 0). Să se arate că picioarele celor trei perpendiculare sunt situate pe o dreaptă.

53. Să se afle pe dreapta $2x + 3y - 6 = 0$, un punct egal depărtat de punctele (4, 4) și (6, 1).

R: $\left(\frac{17}{8}, \frac{7}{12}\right)$.

54. Să se afle pe dreapta $5x - 3y + 15 = 0$ un punct, a cărui distanță la axa Ox să fie egală cu $\frac{2}{3}$ din distanța lui la axa Oy.

R: $\left(-5, -\frac{10}{3}\right), \left(-\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

55. Un punct M se află la o distanță de 8 unități de lungime de origine; coeficientul unghiular al dreptei care trece prin acest punct și prin origine este egal cu $-\frac{1}{4}$. Să se afle coordonatele punctului M.

R: $\left(\pm\frac{32}{17}\sqrt{17}, \quad \mp\frac{8}{17}\sqrt{17}\right)$.

56. Distanța unui punct M la punctul (1, —2) este de 5 unități de lungime; coeficientul unghiular al dreptei care trece prin punctul M și (0, — 8) este $\frac{1}{2}$. Să se afle coordonatele punctului.

R: (4, —6), $\left(\frac{12}{5}, -\frac{34}{5}\right)$.

57. Să se demonstreze analitic că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date este perpendiculara dusă pe segmentul limitat de punctele date și care trece prin mijlocul acestui segment.

58. Să se demonstreze analitic că medianele unui triunghi se intersectează într'un singur punct.

59. Să se demonstreze analitic că perpendicularele coborîte din vârfurile unui triunghi pe laturile opuse se intersectează într'un singur punct.

60. Raza de lumină de ecuație $y = x + 3$ cade pe o placă de sticlă de 1 cm grosime (indicele de refracție 2).

Scanned with OKEN Scanner

Se presupune că placa este astfel aşezată, încât axa absciselor să se afle pe suprafaţa superioară a plăcii şi axa ordonatelor, perpendiculară pe placă. Să se afle ecuaţia razei în timpul trecerii ei prin placă şi după ieşirea ei din placă, precum şi lungimea drumului parcurs de rază înăuntrul plăcii.

R: $y = \sqrt{7}(x+3)$; $y = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

CAPITOLUL III

LOCURILE GEOMETRICE ŞI ECUAŢIILE LOR. CURBE DE ORDINUL DOI

§ 15. Locuri geometrice şi ecuaţiile liniilor, date ca locuri geometrice

1. Metoda expusă în capitolul II pentru stabilirea ecuaţiei unei drepte pe baza unor condiţii geometrice date, care definesc dreapta, poate fi extinsă şi la curbe, dacă ele sunt definite ca locurile geometrice ale unor puncte.

Se numeşte loc geometric al unor puncte în plan totalitatea punctelor, care se bucură de o anumită proprietate caracteristică numai lor şi prin care ele se deosebesc de toate celelalte puncte din plan.

De exemplu, totalitatea punctelor care au proprietatea că se află la aceeaşi distanţă de un punct dat, formează un loc geometric numit cerc.

Totalitatea punctelor, dintre care fiecare este egal depărtat de două puncte date, formează, precum ştim, o dreaptă perpendiculară pe segmentul care uneşte cele două puncte şi trece prin mijlocul segmentului.

Dacă o linie este dată ca un loc geometric de puncte, atunci condiţiile geometrice care o definesc pot fi exprimate analitic, adică printr'o ecuaţie care trebue să fie satisfăcută de coordonatele punctelor acestei linii.

Ca şi în cazul dreptei nu este necesar să se cerceteze toate punctele curbei, ci este suficient să se considere curba ca fiind descrisă de un punct mobil $M(x, y)$; atunci proprietatea, pe care o au toate punctele liniei, se exprimă analitic cu ajutorul ecuaţiei, care leagă coordonatele curente (x, y) ale punctului M.

2. Să se analizeze un exemplu simplu de stabilirea ecuaţiei unui loc geometric.

Exemplu. Să se afle locul geometric al punctelor care se află la o distanţă de dreapta AB de două ori mai mică decât distanţa lor la un punct dat P, care nu este situat pe acea dreaptă.

Rezolvare. Pentru a deduce ecuaţia locului geometric, trebue mai întâi să stabilim poziţia axelor de coordonate. Poziţia axelor de coordonate poate fi, desigur, aleasă oricum, dar dacă aceste axe sunt alese în mod potrivit, ecuaţia locului geometric va fi mai simplă.

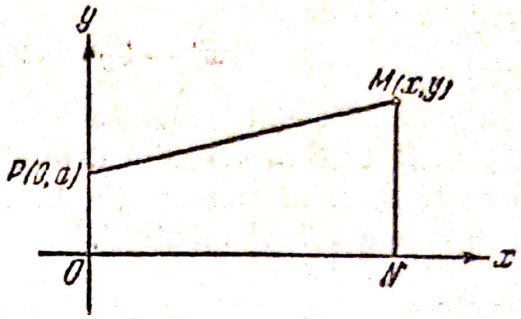

Fig. 24.

Nu există reguli după care să se aleagă axele. Priceperea în alegerea potrivită a axelor se dobândeşte numai prin practică. Să luăm dreapta dată ca axă Ox, iar axa Oy să o ducem prin punctul dat (fig. 24). Intrucât considerăm ca dat punctul P, trebue să considerăm deasemenea cunoscută distanţa lui la dreapta dată, adică la axa Ox.

Să însemnăm această distanţă cu a. Prin urmare, punctul P are coordonatele $(0, a)$.

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al locului geometric dat. Din condiţiile problemei avem :

$$PM = 2NM.$$

Aplicând formula care dă distanţa între două puncte [formula (3), capitolul I] obţinem :

$$PM = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}.$$

Segmentul $NM = y$. Prin urmare vom avea :

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = 2y.$$

Ridicând la pătrat cele două părţi ale ecuaţiei şi reducând termenii asemenea, se obţine ecuaţia locului geometric :

$$x^2 - 3y^2 - 2ay + a^2 = 0.$$

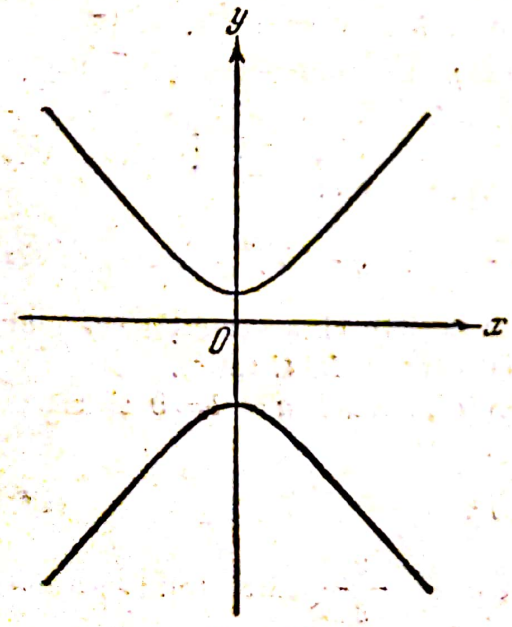

Fig. 25.

Curba care reprezintă locul geometric considerat este arătată în fig. 25.

Dacă s'ar fi aşezat altfel axele de coordonate, de exemplu, dacă nu am fi dus axa Oy prin punctul P, abscisa punctului P nu ar mai fi fost egală cu zero : prin urmare, ar fi fost necesar să atribuim abscisei punctului P o valoare oarecare, diferită de zero, de exemplu valoarea b.

Scanned with OKEN Scanner

In acest caz avem :

$$\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2}=2y,$$

sau

$$x^2-3y^2-2bx-2ay+a^2+b^2=0.$$

Se vede că ecuaţia rezultată în acest caz este mai complicată.

Să trecem acum la deducerea ecuaţiilor locurilor geometrice celor mai simple, la construcţia liniilor care corespund acestor locuri şi la analizarea lor elementară.

§ 16. Cercul

Cercul este locul geometric al punctelor care se află la distanţă egală de un punct dat. Punctul dat se numeşte *centrul* cercului, iar distanţa constantă a punctelor cercului de centru se numeşte *raza* cercului.

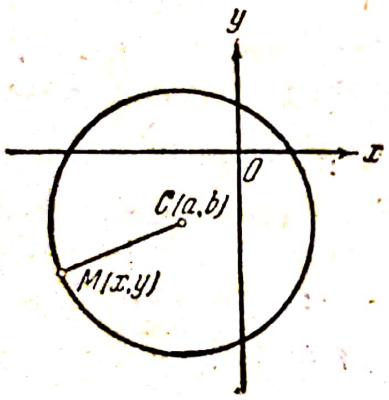

Fig. 26.

Să notăm coordonatele centrului C al cercului cu a şi b şi raza cu r.

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al cercului (fig. 26). Aplicând formula care exprimă distanţa între două puncte [formula (3), capitolul I] vom avea :

$$(x-a)^2+(y-b^2)^2=r^2. \qquad (1)$$

Ecuaţia obţinută este chiar ecuaţia cercului cu raza r şi cu centrul în $C\ (a, b)$.

Dacă orginea se află în centrul cercului, atunci $a=b=0$ şi ecuaţia (1) capătă o formă mai simplă :

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (1^*)$$

Exemplu. Să se scrie ecuaţia cercului cu raza $\frac{2}{3}$ şi cu centrul în punctul $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

Rezolvare. Conform ecuaţiei (1) se obţine :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

2. Să desvoltăm termenii ecuaţiei (1) scriind-o sub forma următoare :

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0. \qquad (2)$$

Inmulţind toţi termenii ecuaţiei obţinute (2) cu numărul A, obţinem ecuaţia echivalentă :

$$Ax^2 + Ay^2 - 2aAx - 2bAy + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Punând $-aA = D$; $-bA = E$; $A(a^2 + b^2 - r^2) = F$, ajungem la ecuaţia cercului sub forma ei generală :

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (3)$$

unde

$$-\frac{D}{A} = a\,; -\frac{E}{A} = b\,; \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2.$$

Astfel, cercul se exprimă printr'o ecuaţie de gradul doi de forma (3). Caracteristicele ei sunt : coeficienţii pătratelor coordonatelor sunt egali şi lipseşte termenul care conţine produsul xy.

Invers, ecuaţiei de forma (3) îi corespunde, ca figură geometrică, cercul.

Să arătăm exactitatea acestei afirmaţii cu ajutorul unui exemplu. Fie ecuaţia $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 5 = 0$.

Aceasta este o ecuaţie de aceeaşi formă ca şi ecuaţia (3) a cercului ; coeficienţii puterilor a doua a coordonatelor curente sunt egali şi lipseşte termenul cu produsul coordonatelor curente. Aici $A = 2$, $D = 1$, $E = -1$, $F = -5$.

Din relaţiile scrise mai sus aflăm coordonatele centrului şi raza cercului :

$$a = -\frac{D}{A} = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{E}{A} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Din relaţia :

$$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{F}{A},$$

obţinem :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - r^2 = -\frac{5}{2}, \text{ unde } r^2 = 3 \text{ sau } r = \sqrt{3}.$$

3. Aceeaşi problemă putea fi rezolvată altfel şi anume prin aducerea ecuaţiei date la forma (1). In scopul acesta împărţim prin doi ambele părţi ale ecuaţiei date şi o transcriem în forma următoare :

$$x^2 + x + y^2 - y = \frac{5}{2}.$$

Acum adăugăm la ambii membri ai ecuaţiei astfel de numere, ca în membrul întâi să se formeze suma a două pătrate perfecte, la fel

ca în ecuaţia (1). Evident, că în scopul acesta trebue să adăugăm la primii doi termeni $\frac{1}{4}$, la ceilalţi doi, deasemenea $\frac{1}{4}$ şi, pentru ca ecuaţia să rămână valabilă, să adunăm şi la membrul al doilea suma $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

In felul acesta, obţinem :

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=3,$$

sau

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=3.$$

Forma ecuaţiei obţinută arată imediat că ea reprezintă un cerc, al cărui centru este în punctul $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ şi cu raza $\sqrt{3}$.

Observaţie. Se poate totuşi întâmpla ca, pentru anumite valori ale coeficienţilor, o ecuaţie de forma (3) să nu reprezinte un cerc.

De exemplu, ecuaţia :

$$x^2+y^2-2x+4y+5=0$$

scrisă sub forma :

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0,$$

arată că îi corespunde punctul (1, —2), iar nu un cerc, întrucât membrul întâi al ecuaţiei se poate anula numai atunci când fiecare paranteză este egală cu zero, adică numai pentru $x=1$ şi $y=-2$.

Să mai cercetăm ecuaţia :

$$x^2+y^2-2x+4y+7=0.$$

Scriind-o sub forma :

$$(x-1)^2+(y+2)^2=-2,$$

vedem că nu este satisfăcută de nicio pereche de valori reale ale coordonatelor curente (x, y).

Prin urmare, această ecuaţie nu reprezintă o curbă reală *).

§ 17. Elipsa

Se numeşte elipsă locul geometric al punctelor, pentru care suma distanţelor la două puncte date, care se numesc focare, este o mărime constantă.

*) In astfel de cazuri se spune că ecuaţia reprezintă un cerc imaginar.

Să stabilim ecuaţia pe care trebue să o satisfacă orice punct al elipsei.

Notăm focarele cu F_1 şi F_2. Axa Ox o aşezăm pe dreapta care uneşte focarele, iar originea o luăm la mijlocul distanţei dintre focare (fig. 27). Dacă însemnăm cu $M(x, y)$ un punct oarecare al elipsei şi cu $2a$ suma constantă a distanţelor lui la F_1 şi F_2, atunci vom avea :

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (4)$$

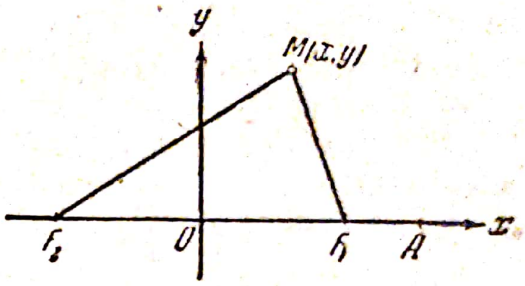

Fig. 27.

Pentru a exprima egalitatea (4) prin coordonatele punctului M, trebue să mai cunoaştem coordonatele focarelor. Să considerăm distanţa între focare egală cu $2c$. Atunci coordonatele focarului F_1 vor fi c şi 0, iar ale focarului F_2, evident, $-c$ şi 0. Aplicând acum formula distanţei dintre două puncte [formula (3), capitolul I], aflăm :

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{şi} \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Inlocuind aceste expresii în egalitatea (4), obţinem ecuaţia care va fi satisfăcută de coordonatele oricărui punct al elipsei, adică ecuaţia elipsei :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (5)$$

Ecuaţia (5) poate fi adusă la o formă mai simplă, înlăturând radicalii. In acest scop trecem radicalul al doilea din membrul întâi în membrul al doilea :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (5^*)$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuaţiei (5*) :

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Reducând termenii asemenea şi simplificând prin 4 ambii membri ai ecuaţiei, o aducem la forma :

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Ridicăm din nou ambii membri la pătrat :

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

de unde rezultă, după reducerea termenilor asemenea :

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

sau

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (5^{**})$$

Astfel obținem ecuația elipsei fără radical.

Deobicei acestei ecuații i se mai dă și o altă formă. Intrucât suma a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât latura a treia, avem $F_1M + F_2M > F_2F_1$, sau $2a > 2c$, sau, în fine, $a > c$. Prin urmare $a^2 - c^2$ este mărime pozitivă și deci poate fi scrisă ca pătrat al unui număr :

$$a^2 - c^2 = b^2. \qquad (6)$$

Introducând b^2 în locul diferenței $a^2 - c^2$ în ecuația (5**) a elipsei, obținem :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad (7)$$

sau, împărțind ambii membri ai acestei ecuații prin a^2b^2 se obține :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

Aceasta este ecuația elipsei în forma ei cea mai simplă. Dacă am fi așezat altfel axele de coordonate, ecuația ar fi fost mai complicată.

Dând valori arbitrare abscisei (sau ordonatei) și calculând din ecuația (8) valorile corespunzătoare ale ordonatelor (sau absciselor), se pot construi oricâte puncte ale elipsei cu aceste coordonate calculate, care satisfac ecuația elipsei.

§ 18. Determinarea formei elipsei

Pentru a determina forma elipsei să rezolvăm ecuația (7) sau (8) în raport cu ordonata y :

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{sau} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

de unde

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (9)$$

Din această formă a ecuației elipsei se vede că fiecărei valori a abscisei x îi corespund valori ale ordonatei y, egale în valoare absolută, însă cu semne opuse, ceeace arată că punctele elipsei sunt așezate simetric în raport cu axa absciselor.

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţia elipsei, rezolvată în raport cu abscisa x, adică din ecuaţia :

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \qquad (9^*)$$

se trage deasemenea concluzia că punctele elipsei sunt aşezate simetric faţă de axa ordonatelor.

Ecuaţia (9) arată că ordonata y are valori reale numai pentru acele valori ale lui x care satisfac relaţia $x^2 \leqslant a^2$, adică atunci când x nu întrece pe a în valoare absolută. In mod analog, din ecuaţia (9*) rezultă că abscisa x rămâne reală numai cu condiţia $y^2 \leqslant b^2$, adică pentru valorile lui y, care în valoare absolută nu depăşesc valoarea b. Punctele pentru care valoarea absolută a abscisei nu depăşeşte pe a se află în interiorul unei fâşii limitate de dreptele PQ şi SR, paralele cu axa Oy şi situate, una la dreapta, cealaltă la stânga, la distanţa a de această axă (fig. 28).

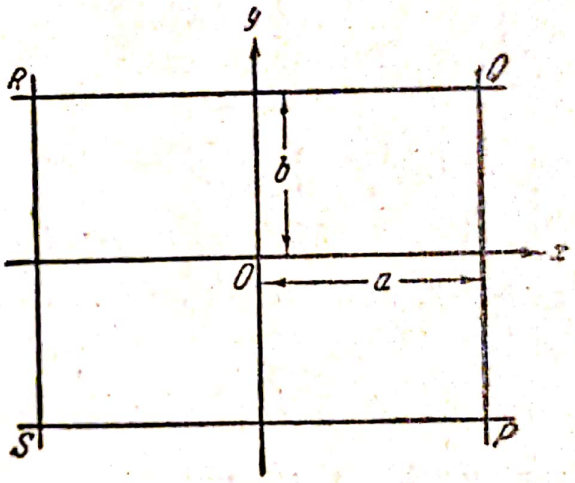

Fig. 28.

Punctele pentru care valoarea absolută a ordonatei y nu depăşeşte mărimea b se află în interiorul unei fâşii limitate de dreptele PQ şi SP, paralele cu axa absciselor şi situate faţă de această axă la distanţa b, deasupra şi dedesubt. Punctele ale căror abscise şi ordonate satisfac simultan condiţiile analizate se află deci în partea comună a acestor fâşii, adică în dreptunghiul $PQRS$ (fig. 28).

Din ecuaţia (9*) se vede, că abscisa unui punct al elipsei va avea valoarea absolută cea mai mare pentru $y = 0$.

Dacă $y = 0$; abscisa $x = \pm a$. Prin urmare elipsa taie axa Ox în punctele $(a, 0)$ şi $(-a, 0)$. Din ecuaţia (9) se vede că ordonata cea mai mare, ca valoare absolută, a unui punct al elipsei va fi pentru $x = 0$. Când $x = 0$, ordonata $y = \pm b$.

Prin urmare, elipsa taie axa Oy în punctele $(0, b)$ şi $(0, -b)$. Din ecuaţia (9) se vede că în timp ce abscisa x creşte dela 0 la a, ordonata y a punctului elipsei descreşte dela b la 0.

Ţinând seama de cele spuse până aici despre simetria elipsei în raport cu axa Ox şi axa Oy, se poate trage concluzia că elipsa are înfăţişarea din fig. 29.

Scanned with OKEN Scanner

Mai rezultă şi din următoarele consideraţii că elipsa este simetrică în raport cu axele Ox şi Oy.

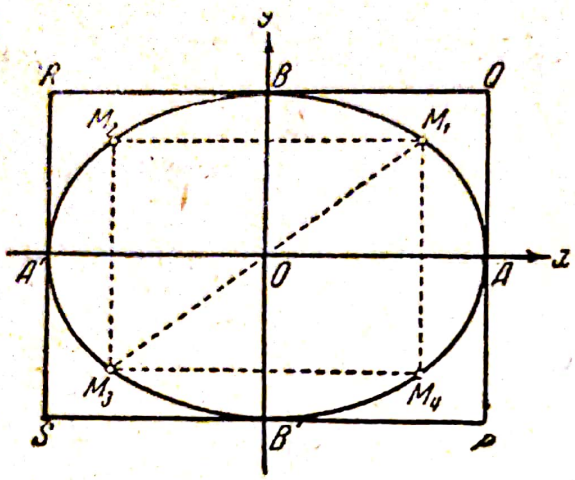

Fig. 29.

In ecuaţia (8) a elipsei, coordonatele curente intră numai la gradul doi.

Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct al elipsei (fig. 29). Prin urmare coordonatele x_1 şi y_1 trebue să satisfacă ecuaţia (8), adică trebue să existe indentitatea

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Insă în cazul acesta se află pe elipsă şi punctele :

$$M_2(-x_1, y_1), \quad M_3(-x_1, -y_1), \quad M_4(x_1, -y_1),$$

astfel că, atunci când este valabilă egalitatea :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

sunt valabile şi egalităţile :

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Insă punctul M_4 este simetricul punctului M_1 în raport cu axa Ox, iar punctul M_2 simetricul punctului M_1 în raport cu axa ordonatelor. Prin urmare elipsa este aşezată simetric în raport cu axele de coordonate sau, exprimat altfel, axele de coordonate sunt axe de simetrie ale elipsei.

In afară de aceasta, punctul M_3 este simetricul punctului M_1 în raport cu originea. Rezultă de aici că elipsa este aşezată simetric şi în raport cu originea.

Segmentul $A'A$ se numeşte *axa mare* a elipsei. Lungimea axei mari este egală cu $2a$. Segmentul $B'B$ este *axa mică* a elipsei. Lungimea ei este $2b$.

Punctele A, A', B, B' se numesc *vârfurile* elipsei. Punctul O de intersecţie al axelor elipsei se numeşte *centrul* elipsei.

Observaţie. Dacă $b > a$ ecuaţia (8) reprezintă, evident, ecuaţia unei elipse ale cărei focare se află pe axa Oy la distanţa $\pm\sqrt{b^2-a^2}$ de origine. In cazul acesta axa mare este segmentul $B'B = 2b$, iar cea mică segmentul $A'A = 2a$.

§ 19. Construcţia punctelor elipsei

1. Se dă elipsa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rezolvăm ecuaţia în raport cu y :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (9)$$

Construim un cerc având axa mare a elipsei ca diametru (fig. 30). Ecuaţia acestui cerc este :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Dacă notăm cu y' ordonata unui punct oarecare L al cercului, care corespunde abscisei $OP = x$, vom avea :

$$y' = \pm\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Pentru a compara ordonatele de acelaşi semn ale elipsei şi cercului, care corespund aceleiaşi valori x, împărţim pe y prin y' şi obţinem :

$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a},$$

adică, *pentru aceeaşi abscisă, ordonata unui punct de pe elipsă se raportează la ordonata punctului de aceeaşi abscisă de pe cercul având axa mare ca diametru, ca şi semiaxa mică a elipsei la semiaxa mare.*

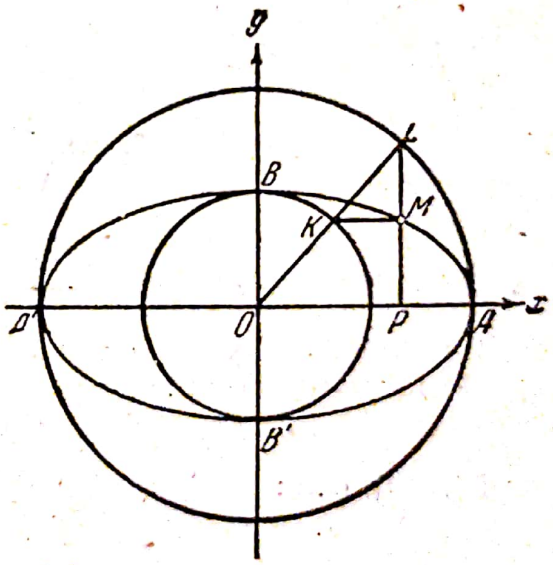

Fig. 30.

Aceasta conduce la următoarea metodă simplă de construire a punctelor elipsei, atunci când sunt cunoscute axele ei.

Luând cele două axe ale elipsei AA' şi BB' ca diametri, se construesc două cercuri concentrice şi din centru se duce raza OL (fig. 30). Se duce apoi prin L, punctul de intersecţie al acestei raze cu cercul mare, dreapta LP, paralelă cu axa mică, şi prin K, punctul de intersecţie cu cercul mic, dreapta KM, paralelă cu axa mare. La intersecţia acestor drepte se obţine punctul M, care este un punct al elipsei. In adevăr datorită faptului că paralelele

OP şi KM împart laturile unghiului P în părţi proporţionale, se poate scrie :

$$\frac{MP}{PL} = \frac{OK}{OL} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}$$

sau $\frac{y}{y'} = \frac{b}{a}$, de unde :

$$y = \frac{b}{a} y' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Schimbând unghiul de înclinare al razei OL, se pot construi astfel oricâte puncte ale elipsei dorim.

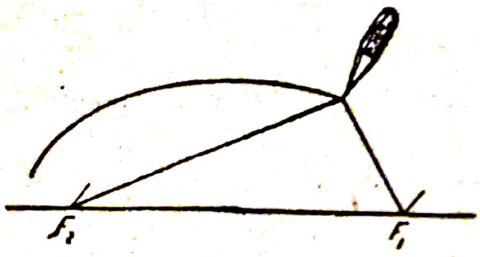

Fig. 31.

2. Din definiţia elipsei ca loc geometric al punctelor, pentru care suma distanţelor la două puncte date (focare) este o mărime constantă, egală cu $2a$, rezultă următorul mod de construcţie, printr'o mişcare continuă, cu ajutorul unui fir care nu se lungeşte.

Cele două capete ale unui fir, a cărui lungime este egală cu lungimea axei mari a elipsei, se fixează în focarele elipsei şi apoi se întinde firul cu ajutorul unui vârf de creion, care atinge hârtia.

Din însăşi definiţia elipsei se înţelege că atunci când vom deplasa vârful pe hârtie, astfel ca firul să fie mereu întins, vârful va descrie o elipsă (fig. 31).

§ 20. Excentricitatea elipsei

Raportul dintre distanţa între focarele elipsei, $2c$, şi lungimea axei mari $2a$, adică raportul $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, se numeşte excentricitatea elipsei şi se notează deobicei cu litera e.

Din formula (6) avem :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Astfel, obţinem :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \qquad (10)$$

Excentricitatea elipsei este, după cum rezultă din definiţia ei, un număr mai mic decât unitatea.

Mărimea excentricității definește forma elipsei. Cu cât excentricitatea elipsei este mai mare, cu atât elipsa are o formă mai plată. Prin mărirea proporțională a axelor elipsei forma și excentricitatea ei nu se modifică.

§ 21. Legătura între elipsă și cerc

Să cercetăm un caz particular al elipsei și anume cazul când $a = b$. Atunci ecuația (8) are forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Aceasta este însă ecuația unui cerc cu raza a și cu centrul în origine. De aci se trage concluzia că cercul este un caz particular al elipsei, și anume că este o elipsă ale cărei axe sunt egale între ele.

Din formula (10) urmează că pentru $a = b$ excentricitatea

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0.$$

Deci, cercul este o elipsă a cărei excentricitate este egală cu zero.

§ 22. Hiperbola

Se numește hiperbolă locul geometric al punctelor, pentru care diferența distanțelor la două puncte date, numite focare, este o mărime constantă.

Plecând dela definiția hiperbolei, să aflăm ecuația ei.

Alegem aceeași poziție a axelor de coordonate ca la deducerea ecuației elipsei. Să notăm cu $2c$ distanța între focarele F_1 și F_2 și cu $2a$ diferența constantă a distanțelor punctelor hiperbolei la focare.

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al hiperbolei. După definiția hiperbolei avem (fig. 32).

$$F_2M - F_1M = \pm 2a.$$

Exprimând distanțele F_2M și F_1M prin formula distanței dintre două puncte, se obține:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Aceasta este ecuația hiperbolei. Să eliminăm radicalii și să dăm ecuației o formă mai simplă.

Scanned with OKEN Scanner

Trecând radicalul al doilea din membrul întâi în membrul al doilea al ecuației obținem :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației :

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2.$$

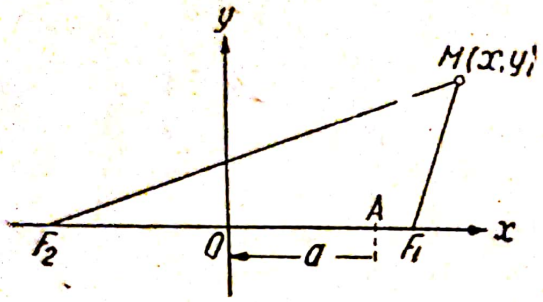

Fig. 32.

După reducere vom avea :

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

Ridicând din nou la pătrat ambii membri, aducem ecuația la forma :

$$(a^2-c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad (11)$$

Ecuația (11) are aceeași formă ca ecuația (5**) a elipsei înainte de introducerea mărimii b. Deosebirea constă însă în faptul că avem $a < c$, deoarece diferența a două laturi ale triunghiului F_2MF_1 este mai mică decât latura a treia :

$$F_2M - F_1M < F_2F_1, \quad \text{sau} \quad 2a < 2c,$$

de unde $a < c$.

Prin urmare, diferența $a^2 - c^2$ este o mărime negativă și poate fi notată cu $-b^2$.

Inlocuind în ecuația (11) pe $a^2 - c^2$ prin $-b^2$, obținem :

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Impărțind toți termenii ecuației prin $-a^2b^2$, o aducem la forma :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12)$$

Aceasta este ecuația cea mai simplă a hiperbolei.

Din relația $a^2 - c^2 = -b^2$ urmează :

$$c = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Raportul $\frac{c}{a}$ se numește *excentricitatea hiperbolei* și se notează deobicei cu litera e :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Din definiție rezultă că excentricitatea hiperbolei este mai mare decât unitatea.

§ 23. Determinarea formei hiperbolei

Ca şi în cazul determinării formei elipsei, se observă imediat că hiperbola este aşezată simetric faţă de axele de coordonate şi faţă de origine.

In adevăr coordonatele curente sunt în ecuaţia hiperbolei (12) la gradul doi; deaceea dacă punctul $M_1\ (x_1, y_1)$ se află pe hiperbolă, adică dacă coordonatele lui x_1 şi y_1 satisfac ecuaţia (12), atunci şi coordonatele punctelor $M_2\ (-x_1, y_1)$, $M_3\ (-x_1, -y_1)$, $M_4\ (x_1, -y_1)$, simetrice faţă de punctul M_1 în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea, vor satisface ecuaţia hiperbolei.

Prin urmare, punctele M_2, M_3 şi M_4 se află deasemenea pe hiperbolă. Rezolvăm ecuaţia (12) în raport cu ordonata y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (12^*)$$

Din ecuaţia (12*) se vede că ordonata y ia valori reale numai pentru valorile lui x care satisfac relaţia $x^2 \geqslant a^2$. Dacă luăm valoarea absolută a abscisei mai mică decât a, atunci y devine o mărime imaginară.

Aceasta arată că în interiorul fâşiei, limitată de dreptele RS şi PQ, paralele cu axa ordonatelor şi situate la stânga şi la dreapta ei, la distanţa a, nu există puncte ale hiperbolei (fig. 33).

Pentru $x = \pm a$ ordonata $y = 0$. Aceasta înseamnă că hiperbola intersectează axa Ox în punctele $A\ (a, 0)$ şi $A'\ (-a, 0)$, care au abscisele cele mai mici în valoare absolută.

Pentru $x = 0$, y ia o valoare imaginară, cum rezultă din ecuaţia (12 *).

Prin urmare, hiperbola nu se intersectează cu axa Oy, ceeace, dealtfel, rezultă şi din consideraţiile anterioare.

Ţinând seama de cele expuse, tragem concluzia, că hiperbola are forma arătată în fig. 33.

Segmentul AA' se numeşte *axa reală* a hiperbolei. Punctele A' şi A poartă numele de vârfuri ale hiperbolei. Segmentul BB', având lungimea $2b$, se numeşte axa imaginară a hiperbolei.

Punctul O, situat la mijlocul dintre vârfurile hiperbolei, se numeşte *centrul* hiperbolei.

§ 24. Asimptotele hiperbolei

1. Să cercetăm problema intersecţiei hiperbolei (12):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

cu drepte care trec prin origine.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste drepte formează un fascicol cu centrul O; fascicolul are ecuaţia :

$$y = kx. \tag{13}$$

Pentru a afla coordonatele punctelor de intersecţie ale hiperbolei cu dreptele fascicolului, se rezolvă simultan ecuaţiile (12) şi (13) în raport cu x şi y. Inlocuind în ecuaţia (12) pe y prin produsul kx din ecuaţia (13), se obţine :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1,$$

de unde :

$$x = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - k^2}}; \tag{14}$$

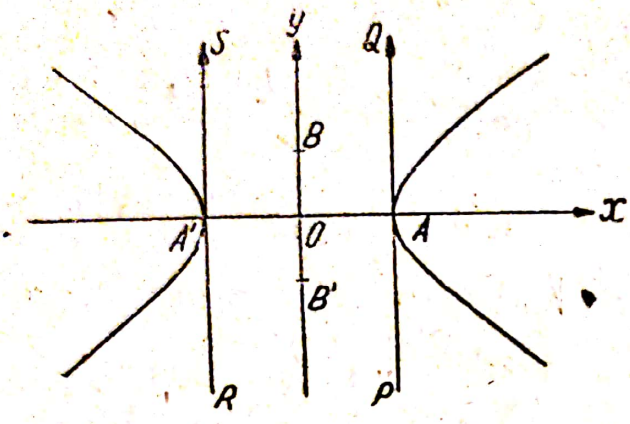

Fig. 33.

apoi, introducând pe x în ecuaţia (13), se obţine :

$$y = \pm \frac{kb}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - k^2}}. \tag{14*}$$

Să cercetăm soluţiile aflate. Din formulele (14) şi (14*) se vede că hiperbola este intersectată numai de acele drepte ale fascicolului (13), ai căror coeficienţi unghiulari au o astfel de valoare, încât expresia de sub radicali, adică diferenţa $\frac{b^2}{a^2} - k^2$, să fie o mărime pozitivă : dacă $\frac{b^2}{a^2} - k^2 < 0$, atunci coordonatele x şi y sunt numere imaginare, iar dacă $\frac{b^2}{a^2} - k^2 = 0$, atunci expresiile care definesc pe x şi y pierd orice sens, întrucât prin zero nu se poate împărţi.

2. Dreapta fascicolului (13) corespunzătoare valorii $k = 0$, adică dreapta $y = 0$ (care este axa reală a hiperbolei), intersectează hiperbola.

Să rotim această dreaptă în jurul punctului O şi în sens invers mişcării acelor unui ceasornic. Vom obţine drepte cu coeficient unghiular crescător.

Dacă numărul k creşte, diferenţa $\frac{b^2}{a^2} - k^2$ descreşte, apropiindu-se de zero. Aceasta înseamnă, cum rezultă din formulele (14) şi (14*) că

coordonatele x, y ale punctelor de intersecţie ale dreptelor fascicolului (13) cu hiperbola vor creşte în valoare absolută, ceeace arată că punctele de intersecţie ale dreptelor cu hiperbola se depărtează nelimitat, deplasându-se dealungul părţii superioare a ramurii dreptei (v. fig. 34, punctele $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots$) şi dealungul părţii inferioare a ramurii stângi a hiperbolei.

Când coeficientul unghiular devine egal cu $\frac{b}{a}$, diferenţa $\frac{b^2}{a^2} - k^2$ se anulează şi, deci, dreapta $y = \frac{b}{a}x$ nu întâlneşte hiperbola.

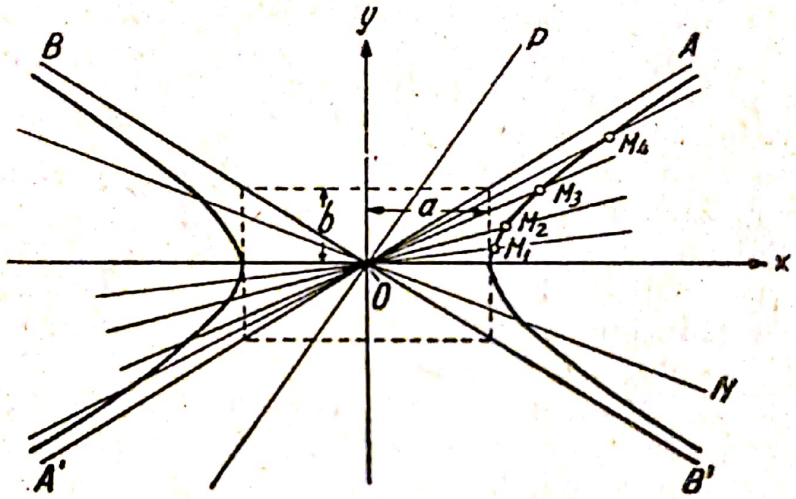

Fig. 34.

Rotind mai departe dreapta, coeficientul unghiular k devine mai mare decât $\frac{b}{a}$, $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$, şi diferenţa $\frac{b^2}{a^2} - k^2$ va lua valori negative.

Coordonatele x, y, corespunzătoare acestor valori k, vor fi imaginare şi, prin urmare, dreptele corespunzătoare ale fascicolului nu intersectează hiperbola.

Când unghiul de înclinare faţă de axa Ox al dreptei care se roteşte trece de 90°, coeficientul k începe să ia valori negative, descrescătoare în valoare absolută (când unghiul creşte dela 90° la 180°, tangenta lui se apropie de zero, rămânând negativă). In cazul acesta diferenţa $\frac{b^2}{a^2} - k^2$ începe să crească, rămânând negativă, până când k ia valoarea $-\frac{b}{a}$,

Dacă valoarea absolută a coeficientului k descreşte mai departe, diferenţa $\frac{b^2}{a^2} - k^2$ va deveni pozitivă.

Aceasta înseamnă, că vom obține din nou drepte, care intersectează hiperbola (punctele de intersecție vor fi acum situate pe partea superioară a ramurii din stânga și pe partea inferioară a ramurii din dreapta a hiperbolei (v. fig. 34).

Astfel dreptele :

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{și} \quad y = \frac{b}{a}x \tag{15}$$

separă dreptele fascicolului (13) care taie hiperbola, de dreptele care nu taie hiperbola.

Toate dreptele care se intersectează cu hiperbola sunt cuprinse în interiorul unghiurilor opuse la vârf AOB' și $A'OB$, formate de dreptele (15) ; dreptele care nu se intersectează cu hiperbola sunt așezate în interiorul perechii a doua de unghiuri opuse la vârf, formate de dreptele (15) (v. fig. 34).

3. Cum am văzut, dreptele (15) nu taie hiperbola. Insă printre celelalte drepte care nu taie hiperbola, ele ocupă un loc deosebit, în timp ce oricare altă dreaptă care nu taie hiperbola se depărtează în prelungirea ei tot mai mult de hiperbolă (v., de exemplu, în fig. 34 dreapta OP), dreptele (15), din contră, se apropie tot mai mult de hiperbolă dacă sunt prelungite în mod nelimitat.

Să notăm cu Y ordonata unui punct al unei drepte (15) și cu y ordonata punctului (12) corespunzător aceleiași valori x, atât pentru dreaptă, cât și pentru hiperbolă.

Din ecuația hiperbolei avem :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

și din ecuația primei dintre dreptele (15) de exemplu :

$$Y = \frac{b}{a}x.$$

Din inegalitatea :

$$x^2 > x^2 - a^2$$

urmează, că mărimea absolută a abscisei x este mai mare decât $\sqrt{x^2 - a^2}$. Insă atunci și mărimea absolută a produsului $\frac{b}{a}x$ este mai mare decât mărimea absolută a produsului $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, adică mărimea absolută a ordonatei Y a dreptei (15) este mai mare decât mărimea absolută a ordonatei y a hiperbolei.

Aceasta dovedește că punctele hiperbolei sunt așezate în interiorul unghiurilor opuse la vârf, formate de dreptele (15) (fig. 35).

Scanned with OKEN Scanner

Să analizăm acum problema de a stabili cât de mult se apropie ramurile hiperbolei de dreptele (15), adică în ce mod variază diferența $Y - y$ între ordonatele dreptelor (15) și ale hiperbolei, atunci când abscisa x crește în valoare absolută.

Datorită simetriei hiperbolei și a dreptelor (15) în raport cu axele de coordonate, este suficient să cercetăm această problemă numai pentru primul cadran. Considerând, deaceea, x, y și Y pozitiv, vom avea:

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

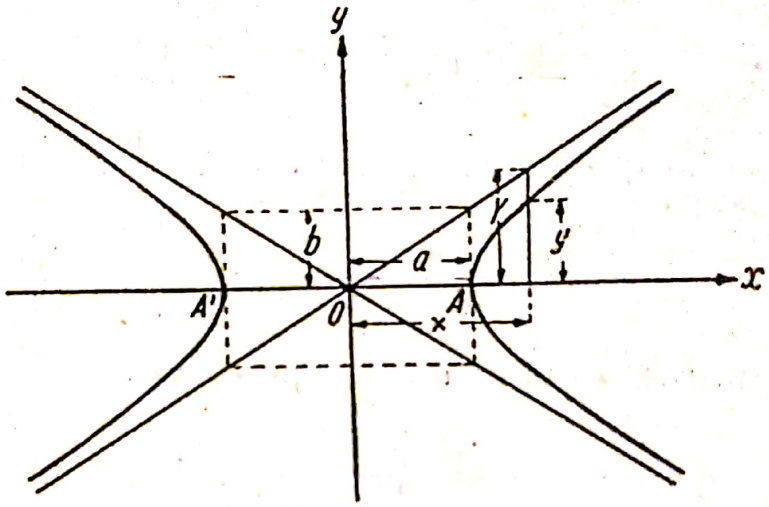

Fig. 35.

Când x crește, această diferență se schimbă, însă din expresia obținută este greu de apreciat dacă diferența crește sau descrește.

Deaceea să transformăm membrul doi al expresiei, înmulțindu-l și împărțindu-l prin suma $x + \sqrt{x^2 - a^2}$:

$$Y - y = \frac{b\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}$$

sau, după simplificare,

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Din expresia obținută se vede, că, pe măsura creșterii abscisei x, această diferență va descreste în mod nelimitat, întrucât numărătorul fracției rămâne mereu o mărime constantă, iar numitorul crește infinit.

Aceasta înseamnă, că hiperbola se va apropia mereu de dreapta $Y = \frac{b}{a}x$ fără o a atinge vreodată.

Pe baza simetriei ramurilor hiperbolei şi a poziţiei simetrice a dreptelor (15) faţă de axele coordonatelor, se trage concluzia, că partea ramurii drepte, situată sub axa Ox, la fel ca şi partea superioară a ramurii din stânga, se apropie nelimitat de dreapta $Y = -\frac{b}{a}x$ iar partea inferioară a ramurii din stânga a hiperbolei de dreapta $Y = \frac{b}{a}x$.

Dreapta de care o curbă se apropie nelimitat se numeşte *asimptota* acestei curbe.

Astfel am stabilit că hiperbola are două asimptote, ale căror ecuaţii sunt:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{şi} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Exemplu. Să se afle excentricitatea, coordonatele focarelor şi ecuaţiile asimptotelor hiperbolei:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

Rezolvare. După formula, dată la sfârşitul § 22, avem:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Pentru hiperbola din acest exemplu, $a = 5$, $b = 2$; prin urmare:

$$e = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

Excentricitatea este raportul dintre distanţa focarului la origine şi lungimea semiaxei reale (v. § 22), adică:

$$e = \frac{OF_1}{OA} = \frac{OF_1}{a}$$

(v. fig. 32). Prin urmare, $OF_1 = ae = 5 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{29} = \sqrt{29}$. Deci, coordonatele focarelor sunt: $(\sqrt{29}, 0)$ şi $(-\sqrt{29}, 0)$.

Formulele (15) dau ecuaţia asimptotelor:

$$y = \pm \frac{2}{5}x,$$

sau

$$2x \pm 5y = 0.$$

§ 25. Hiperbola echilateră

Dacă $a = b$, hiperbola se numeşte echilateră. Ecuaţia ei are forma :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ sau } x^2 - y^2 = a^2.$$

Din formulele (15) se află că ecuaţiile asimptotelor hiperbolei echilatere sunt :

$$y = x \text{ şi } y = -x.$$

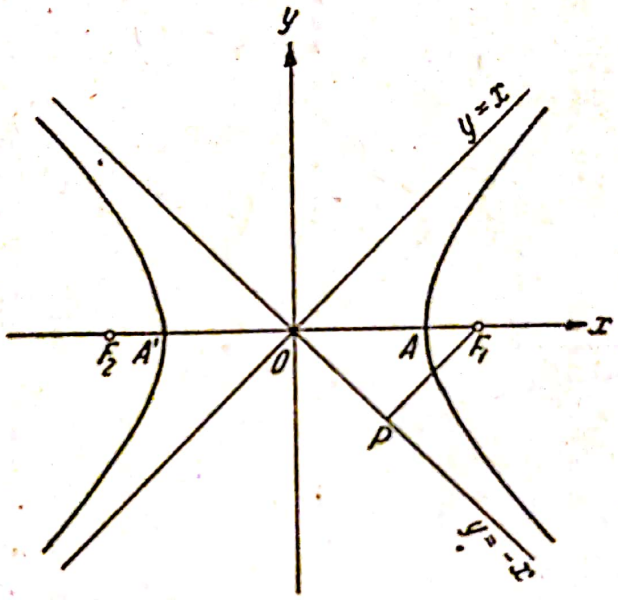

Fig. 36.

Prin urmare, asimptotele hiperbolei echilatere sunt două drepte, dintre care una este înclinată faţă de axa Ox cu un unghi de 45°, iar a doua cu un unghi de 135°.

Unghiul dintre asimptotele hiperbolei echilatere este de 90° (fig. 36).

Distanţele dela focare la asimptote sunt egale între ele (nu numai pentru hiperbolele echilatere, ci pentru orice hiperbolă).

Una din aceste distanţe este arătată în fig. 36 prin segmentul F_1P. Să exprimăm lungimea acestui segment.

Se ştie din § 22, că $OF_1 = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pentru hiperbola echilateră $a = b$, de unde $OF_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Triunghiul OPF_1 este un triunghi dreptunghic isoscel. Prin urmare :

$$F_1P = a.$$

Să rotim sistemul de coordonate cu —45°, atunci axa Oy va coincide cu asimptota $y = x$, iar axa Ox cu asimptota $y = -x$.

Asimptotele vor fi noile axe de coordonate. Dându-le poziția obișnuită, obținem fig. 37.

Noile axe de coordonate sunt notate cu Ox' și Oy'. Care vor fi coordonatele focarelor F_1 și F_2 în raport cu noul sistem de coordonate?

Am văzut că $F_1P = a$. Și întrucât $OP = F_1P = a$, coordonatele focarelor F_1 sunt (a, a). Evident, pentru focarul F_2 avem coordonatele $(-a,-a)$.

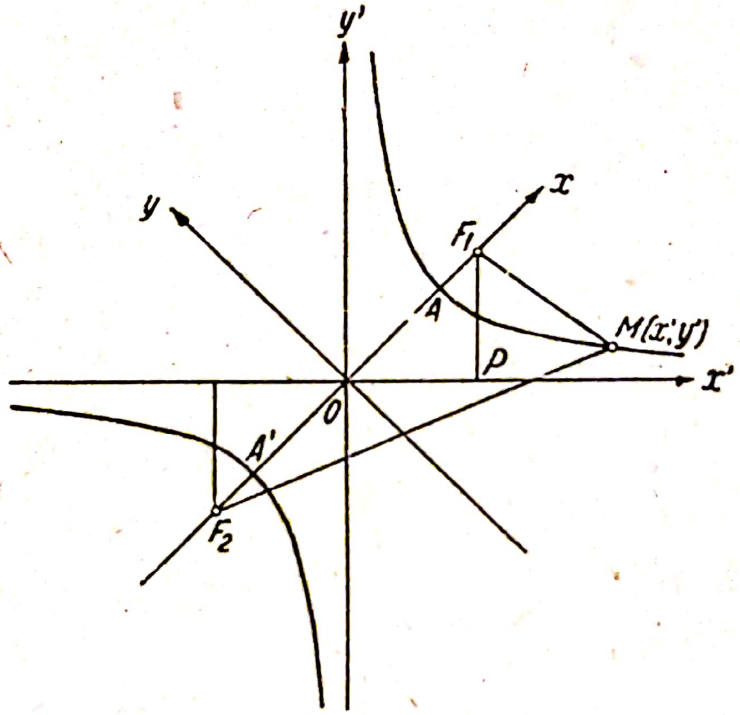

Fig. 37.

Să deducem ecuația hiperbolei echilatere în raport cu noul sistem de coodonate sau, cum se spune, să raportăm ecuația hiperbolei la asimptote.

Pa baza definiției hiperbolei avem $F_2M - F_1M = 2a$. Aplicând formula distanței între două puncte, putem pune această egalitate în felul următor:

$$\sqrt{(x' + a)^2 + (y' + a)^2} - \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - a)^2} = \pm 2a$$

[acum coordonatele curente ale unui punct oarecare M al hiperbolei sunt notate cu (x', y')].

Trecem radicalul al doilea în membrul al doilea al ecuației obținute și ridicăm ambii membri la pătrat. După unele transformări elementare se obține:

$$x' + y' - a = \pm \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - a)^2}.$$

Ridicând din nou la pătrat ambii membri şi efectuând simplificările, ecuaţia devine :

$$2x'y' = a^2,$$

sau

$$x'y' = \frac{a^2}{2}.$$

Deci, ecuaţia hiperbolei echilatere :

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

raportată la asimptote, este :

$$x'y' = \frac{a^2}{2},$$

unde x' şi y' sunt coordonatele curente în raport cu noile axe de coordonate, care sunt asimptotele.

Dacă se pune $a^2 = 2m^2$, ultima ecuaţie ia forma :

$$x'y' = m^2,$$

$$y' = \frac{m^2}{x'}.$$

De aici se vede, că hiperbola echilateră, raportată la asimptote exprimă în mod grafic legea proporţionalităţii inverse.

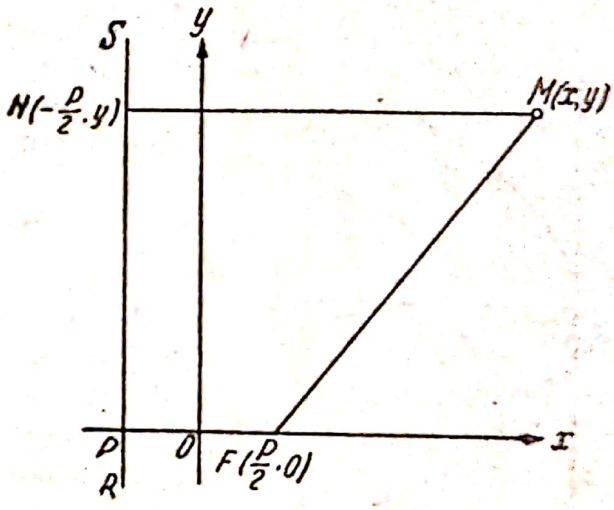

Fig. 38.

§ 26. Parabola

1. *Se numeşte parabolă locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct dat, numit focar, şi de o dreaptă dată, numită directoarea parabolei.*

Luăm ca axă Ox o dreaptă care trece prin focarul F şi este perpendiculară pe directoarea RS (fig. 38).

Luăm originea la mijlocul distanţei între directoare şi focar. Să notăm $PF = p$.

Mărimea p se numeşte parametrul parabolei. Atunci focarul F va avea coordonatele $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al parabolei. După definiţia parabolei avem :

$$FM = NM.$$

Punctul N are coordonatele $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$; deaceea, aplicând formula distanței între două puncte, se poate scrie egalitatea în forma :

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

sau ridicând la pătrat ambii membri ai ecuației :

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

de unde, reducând termenii asemenea, se obține :

$$y^2=2px. \qquad (16)$$

Aceasta este ecuația parabolei sub forma cea mai simplă. Ecuația (16) arată că x nu poate lua valori negative, întrucât pentru $x<0$ valorile lui y devin imaginare.

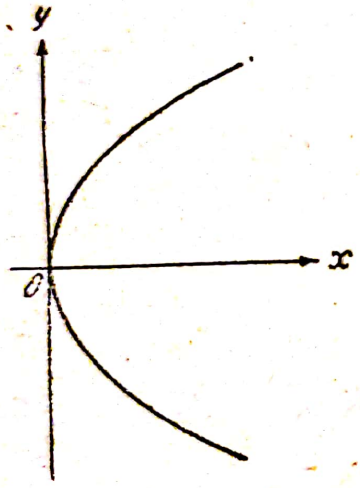

Fig. 39.

Pentru $x=0$, ordonata $y=0$. Prin urmare parabola trece prin origine. Scriind ecuația (16) sub forma :

$$y=\pm\sqrt{2px},$$

se deduce că curba este simetrică în raport cu axa Ox. Când x crește, crește și valoarea absolută a lui y.

Această cercetare dă o imagine despre forma parabolei, arătată în figura 39.

Punctul O se numește vârful parabolei. Din cele expuse anterior rezultă în mod c ar că vârful parabolei se află la mijlocul distanței între focar și directoare.

2. Dacă se ia focarul parabolei la stânga directoarei, coordonatele lui vor fi $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, iar ecuația parabolei va avea forma :

$$y^2=-2px.$$

In cazul acesta parabola este așezată la stânga axei Oy. Propunem cititorului să deducă singur ecuația curbei pentru această poziție a focarului în raport cu directoarea.

Propunem deasemenea cititorului să se convingă singur că, atunci când directoarea este așezată orizontal, iar axa Oy trece prin focarul situat deasupra directoarei și este perpendiculară pe directoare, ecuația parabolei ia forma :

$$x^2=2py.$$

Scanned with OKEN Scanner

Curba va fi simetrică în raport cu axa Oy. Ramurile ei vor fi îndreptate în sus. Dacă focarul este aşezat sub directoare, ramurile parabolei vor fi îndreptate în jos şi ecuaţia ei ia forma :

$$x = -2py.$$

Exemplu. O piatră aruncată sub un unghi ascuţit faţă de orizont descrie un arc de parabolă şi cade la distanţă de 20 m dela poziţia iniţială.

Înălţimea cea mai mare atinsă de piatră este de 10 m. Să se determine parametrul traiectoriei parabolice.

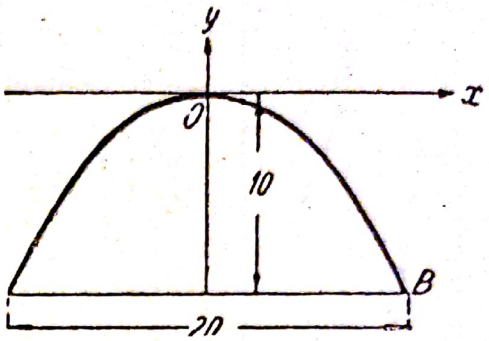

Fig. 40.

Rezolvare. Alegând axele de coordonate astfel cum se arată în fig. 40, se trage concluzia că traiectoria parabolică este exprimată prin ecuaţia :

$$x^2 = -2py.$$

Punctul B de cădere al pietrei pe pământ are coordonatele $(10, -10)$.

Întrucât acest punct se află pe parabolă, coordonatele $(10, -10)$ trebue să satisfacă ecuaţia precedentă. Se obţine astfel : $100 = -2p \cdot (-10)$, de unde aflăm : $p = 5$.

§ 27. Parabola $y = Ax^2 + Bx + C$

1. Să presupunem acum că vârful parabolei se află într'un punct oarecare $O'(a, b)$ şi că axa ei de simetrie este paralelă cu axa Oy (fig. 41).

Să construim sistemul de coordonate ajutător $O'x'y'$, luând originea în vârful parabolei şi stabilind aceleaşi sensuri pe noile axe ca şi pe axele Ox şi Oy.

Aceasta înseamnă că axa $O'y'$ coincide cu axa de simetrie a parabolei.

Atunci, în conformitate cu paragraful precedent, ecuaţia parabolei în raport cu noul sistem de coordonate va avea forma :

$$x'^2 = 2py'.$$

Problema constă în a exprima această ecuaţie în raport cu sistemul iniţial de coordonate Oxy.

Din fig. 41 avem :

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

Înlocuind aceste valori ale coordonatelor curente (x', y') în ecuaţia precedentă se obţine :

$$(x - a)^2 = 2p(y - b). \tag{17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta este forma ecuației unei parabole, al cărei vârf se află în punctul (a, b) și care are drept axă dreapta paralelă cu axa Oy.

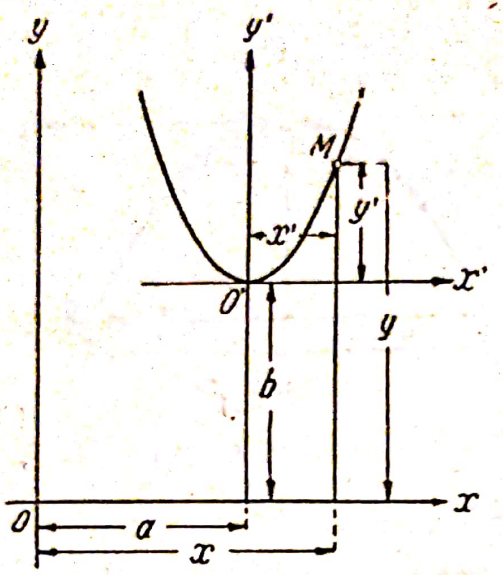

Fig. 41.

Dacă parabola este îndreptată de partea sensului negativ al axei Oy, ecuația va lua, evident, forma :

$$(x-a)^2 = -2p\,(y-b).$$

2. In general o curbă dată prin ecuația :

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad (18)$$

este o parabolă, prin urmare ecuația (18) se poate aduce la forma (17).

Impărțind ambii membrii ai ecuației (18) prin A și trecând termenul liber în membrul întâi obținem :

$$\frac{y}{A} - \frac{C}{A} = x^2 + \frac{B}{A}x.$$

Complectând acum pătratul în membrul al doilea, în care scop adăugăm $\frac{B^2}{4A^2}$ la ambii membrii ai ecuației, vom avea :

$$\frac{y}{A} - \frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2} = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2},$$

sau

$$\frac{1}{A}\left(y - \frac{4AC-B^2}{4A}\right) = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2.$$

Punând :

$$a = -\frac{B}{2A},\quad b = \frac{4AC-B^2}{4A},\quad 2p = \frac{1}{A}, \qquad (19)$$

obținem o ecuație de forma (17) :

$$2p\,(y-b) = (x-a)^2.$$

Să cercetăm acum parabola pentru care coordonatele (a, b) ale vârfului și parametrului p sunt definite prin formula (19) :

Precum știm, ecuația unei astfel de parabole va fi :

$$(x-a)^2 = 2p\,(y-b).$$

Această ecuație coincide exact cu forma la care am adus ecuația (18). Prin urmare, ecuația (18) este în adevăr ecuația unei parabole a cărei axă de simetrie este paralelă cu axa Oy.

Exemplul 1. Să se construiască parabola $y = x^2 - 4x - 5$.

Rezolvare. Aflăm coordonatele vârfului parabolei; în acest scop, adăugând 9 la fiecare membru al ecuației, aducem ecuația la forma:

$$y + 9 = (x - 2)^2.$$

Prin urmare, vârful parabolei se află în punctul (2, —9). Pentru a construi parabola, aflăm punctele ei de intersecție cu axele de coordonate. Punând $x=0$, aflăm $y = -5$. Prin urmare, curba taie axa Oy în punctul (0,—5). Punând $y=0$ și rezolvând ecuația de gradul doi

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

determinăm punctele de intersecție ale parabolei cu axa Ox: (5 ,0), (—1, 0). Pentru a putea desena mai precis curba, mai aflăm câteva puncte.

Să luăm de exemplu $x = 1$, atunci $y = -8$; luăm $x=4$, atunci $y=-5$; luăm $x = -2$; atunci $y = 7$, etc. Construim aceste puncte, le unim printr'o linie continuă și obținem graficul din fig. 42.

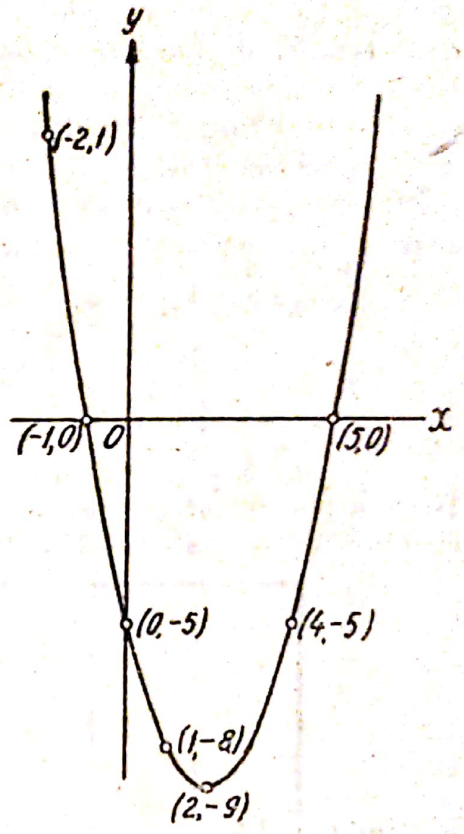

Fig. 42.

Observație. Pentru determinarea coordonatelor vârfului parabolei am fi putut să utilizăm formulele deduse anterior; totuși este preferabil să ne folosim de metoda arătată în acest exemplu.

Exemplul 2. Să se afle ecuația parabolei care trece prin punctele (1, 1); (2, 3); (0, 0), fiind cunoscut că axa ei de simetrie este o dreaptă paralelă cu axa Oy.

Rezolvare. Să considerăm ecuația parabolei sub forma:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Coordonatele punctelor date trebue să satisfacă ecuația parabolei. Punând aceste coordonate în locul coordonatelor curente, se ajunge la sistemul de ecuații:

$$1 = A + B + C, \quad 3 = 4A + 2B + C, \quad 0 = C,$$

de unde se determină coeficienții A, B și C:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 0.$$

Prin urmare ecuația căutată este:

$$2y = x^2 + x.$$

§ 28. Ecuațiile parametrice ale unei curbe

Adeseori este convenabil a exprima o curbă nu printr'o singură ecuație, care leagă coordonatele curente ale punctelor ecuației, ci prin două ecuații, dintre care una definește variația abscisei curente x în funcție de variația unei variabile oarecare, iar cealaltă, variația ordonatei curente y în funcție de aceeași variabilă. Variabila a treia, ajutătoare, de care depind variațiile coordonatelor curente x și y, se numește *parametru*; deaceea și cele două ecuații ale curbei se numesc ecuații *parametrice*. Să explicăm cele spuse prin exemplul următor.

Exemplu. Să dau ecuațiile parametrice ale curbei:

$$x = t^2, \quad y = t,$$

unde t este parametrul. Să se construiască curba.

Rezolvare. Făcând să varieze parametrul t, vor varia și coordonatele x și y. Deaceea punctul $M(x, y)$ își va schimba poziția și va descrie în plan o curbă anumită. Pentru a lămuri aspectul acestei curbe, construim un număr de poziții

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	9	4	1	0	1	4	9
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

ale punctului M, corespunzătoare diferitelor valori ale parametrului t. Să dăm, de exemplu, în acest scop, parametrului valorile -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, etc. Pentru claritate așezăm toate rezultatele într'o tabelă.

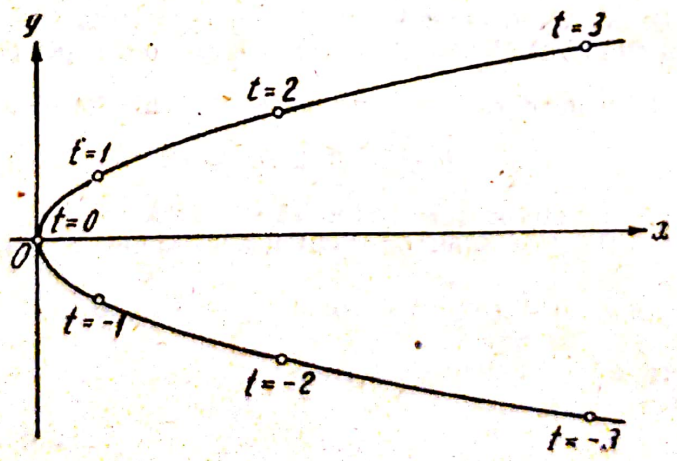

Fig. 43.

Construim acum punctele $(9, -3)$, $(4, -2)$, $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ $(4, 2)$, $(9, 3)$ și le unim cu o linie continuă; obținem astfel curba dată prin ecuațiile $x = t^2, y = t$ (fig. 43).

Scanned with OKEN Scanner

Curba seamănă cu o parabolă. Pentru a ne convinge că este în adevăr o parabolă, observăm că putem, cu ajutorul celor două ecuaţii date, să stabilim legătura directă între x şi y, adică să exprimăm curba printr'o singură ecuaţie. Pentru aceasta trebue să eliminăm parametrul t din cele două ecuaţii date. Întrucât $t = y$, înlocuim t prin coordonata y în ecuaţia $x = t^2$ şi obţinem $x = y^2$. Aceasta este însă ecuaţia unei parabole pe care o cunoaştem.

Ecuaţiile parametrice se utilizează foarte adeseori în mecanică. *Timpul se ia deobicei drept parametru t.* Atunci curba exprimată prin ecuaţiile parametrice reprezintă *traiectoria punctului mobil.* Din acest punct de vedere exemplul analizat dă traiectoria unui punct având drept *lege a mişcării* ecuaţiile $x = t^2$, $y = t$.

Să vedem acum în ce mod se poate exprima cercul şi elipsa sub formă parametrică.

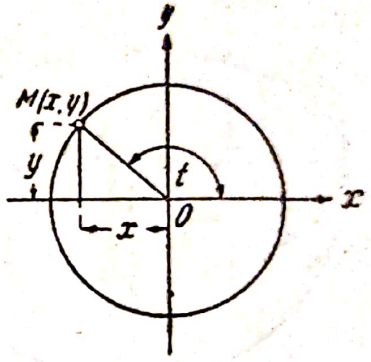

Fig. 44.

§ 29. Ecuaţiile parametrice ale cercului

Fie $M(x, y)$ (fig. 44) un punct oarecare al unui cerc de rază r şi cu centrul în origine. Fie t unghiul format de raza OM cu axa Ox. După definiţia sinusului şi cosinusului avem :

$$x = r \cos t, \qquad y = r \sin t.$$

Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale cercului, t fiind unghiul la centru xOM. Când t variază dela 0 la 2π, punctul $M(x, y)$ descrie cercul.

Ridicăm la pătrat ambele părţi ale fiecărei ecuaţii şi apoi le adunăm membru cu membru ; obţinem :

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t),$$

sau

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Astfel, eliminarea parametrului t a dus la ecuaţia cunoscută a cercului, care leagă pe x cu y.

Exemplu. Un punct se mişcă pe un cerc de rază a cu viteza constantă v. Să se afle legea mişcării punctului.

Rezolvare. În timpul t punctul parcurge un arc de lungimea $s = vt$. Pe de altă parte, $s = \varphi a$, unde φ este unghiul la centru care cuprinde între laturi arcul s. De aici :

$$\varphi = \frac{s}{a} = \frac{vt}{a}.$$

Prin urmare,

$$x = a \cos \frac{vt}{a}, \quad y = a \sin \frac{vt}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 30. Ecuaţiile parametrice al elipsei

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al elipsei. Să construim un cerc având ca diametru axa mare a elipsei (fig. 45). Ducem prin punctul M dreapta LP, paralelă cu axa mică a elipsei. Luăm drept parametru unghiul t format de raza OL a cercului şi axa Ox. Vom avea :

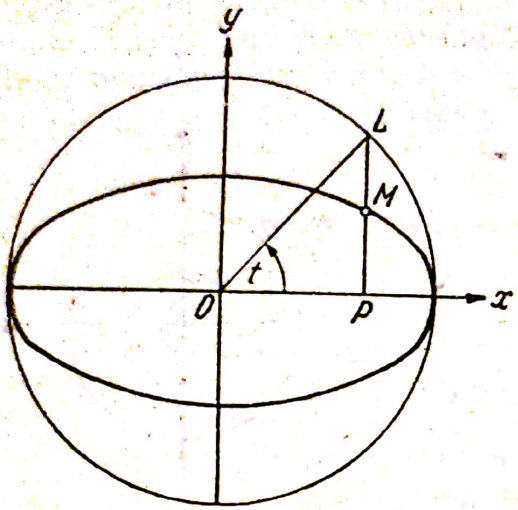

Fig. 45.

$$OP = x = a \cos t.$$

Din § 19 se ştie că :

$$\frac{MP}{LP} = \frac{b}{a},$$

unde b este semiaxa mică a elipsei. Insă $MP = y$ şi $PL = OL \sin t = a \sin t$. Se deduce :

$$y = \frac{b}{a} a \sin t = b \sin t.$$

Deci, ecuaţiile parametrice ale elipsei sunt :

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

Dacă se împarte prima ecuaţie prin a, a doua prin b, se ridică la pătrat ambele ecuaţii şi se adună membru cu membru se obţine ecuaţia cunoscută a elipsei :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§ 31. Curbele de ordinul doi ca secţiuni conice

Curbele de ordinul doi pot fi obţinute ca linii de intersecţie ale suprafeţei unui con circular cu un plan, când acesta ia diferite poziţii. Teoria curbelor de ordinul doi, care se studiază acum prin metodele geometriei analitice a fost elaborată amănunţit de matematicienii Greciei antice (Euclid, Apollonius şi alţii), care au considerat aceste curbe tocmai ca intersecţii ale unui con cu plane. Deaceea curbele de ordinul doi poartă denumirea generală de : *secţiuni conice.*

Să luăm un con circular drept. Fie S vârful lui şi $ABCD$ cercul, care serveşte ca directoare a suprafeţei conului (fig. 46). Conurile formate le prelungim nelimitat în ambele părţi ale vârfului ; atunci

suprafaţa conică va consta din două părţi, numite pânze : pânza $SABCD$ şi pânza $SA'B'C'D'$. Să luăm pe suprafaţa conică un punct oarecare M şi să ducem prin acest punct şi prin axa conului secţiunea axială $MSCA$. Prin acelaşi punct M ducem planul F_1 perpendicular pe secţiunea axială. Acest plan fiind perpendicular pe axa conului, intersecţia conului cu el este un cerc. In orice altă poziţie a planului F_1, în care unghiul mai mic format de el cu axa conului va fi mai mare decât jumătatea unghiului α de deschidere al conului, planul va tăia numai o singură pânză a suprafeţei conice. In acest caz secţiunea va fi o curbă ovală, care este o elipsă având punctul M ca vârf. In fig. 46 este arătată elipsa corespunzătoare poziţiei F_2 a planului F_1. Pe măsura apropierii planului F_1 de poziţia F_3, în care el este paralel cu generatoarea SC $\left(\text{şi formează cu axa conului unghiul } \frac{\alpha}{2}\right)$, elipsa se va lungi şi lărgi, iar în poziţia F_3 rezultă în secţiunea suprafeţei conice o parabolă cu vârful în punctul M. Rotindu-se mai departe, planul F_1 va forma cu axa conului un unghi mai mic decât $\frac{\alpha}{2}$ şi va tăia prin urmare ambele pânze ale suprafeţei conice. In fig. 46 este arătată una din aceste poziţii F_4, în care planul F_1 formează un unghi de 0° cu axa conului adică este paralel cu axa conului. In secţiunea planului F_1 cu suprafaţa conică se obţine în cazul acesta o hiperbolă ; o ramură a hiperbolei, MBD este situată pe pânza $SABCD$, iar cealaltă, $M'B'D'$, pe pânza $SA'B'C'D'$. Vârfurile hiperbolei sunt în punctele M şi M'.

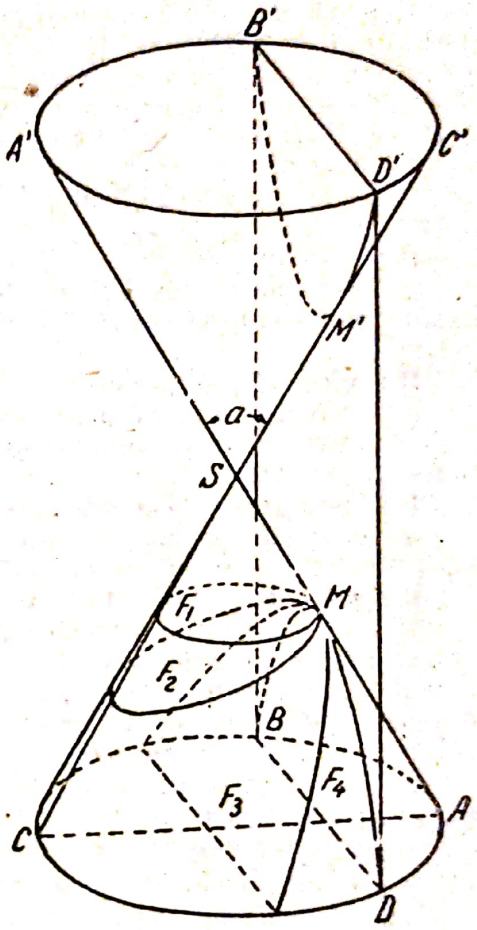

Fig. 46.

Demonstraţiile celor afirmate mai sus sunt date în cursurile amănunţite de geometrie analitică.

Exerciții

Locuri geometrice

1. Să se afle ecuația locului geometric al punctelor a căror distanță la axa Ox este de 5 ori mai mare decât distanța la axa Oy.

R : $y = 5x$.

2. Să se afle ecuația locului geometric al punctelor, a căror distanță la axa Ox este egală cu dublul distanței la axa Oy plus 3 unități de lungime.

R : $y = 2x + 3$.

3. Să se afle ecuația locului geometric al punctelor egal depărtate de punctele $(2, -3)$ și $(3, 2)$.

R : $x + 5y = 0$.

4. Un punct se mișcă pe un plan astfel că distanța lui la axa Oy este mereu egală cu distanța la punctul $(5, 0)$. Să se afle ecuația curbei descrise de acest punct.

R : $y^2 - 10x + 25 = 0$.

5. Un punct se mișcă pe un plan astfel că pătratul distanței lui la punctul $(0, 3)$ este mereu egal cu cubul distanței la axa Oy. Să se afle ecuația curbei descrise de acest punct.

R : $x^2 + (y - 3)^2 = x^3$.

6. Să se afle ecuația locului geometric al punctelor a căror distanță la dreapta $x = 3$ este egală cu distanța lor la punctul $(4, -2)$.

R : $y^2 + 4y - 2x + 11 = 0$.

7. Să se afle ecuația locului geometric al punctelor care posedă proprietatea că coeficientul unghiular al dreptei care unește originea cu un punct al locului este de două ori mai mare decât coeficientul unghiular al dreptei, care unește același punct al locului geometric, cu punctul (a, a).

R : $xy - 2ax + ay = 0$.

8. Un punct se mișcă pe un plan, astfel că distanța lui la origine este mereu egală cu coeficientul unghiular al dreptei care îl unește cu originea. Să se afle ecuația curbei descrise de acest punct.

R : $x^4 + x^2y^2 = y^2$.

Cercul

9. Să se afle ecuația cercului cu centrul în punctul $(3, -5)$ și raza egală cu 4.

R : $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$.

10. Să se afle ecuația cercului cu raza 2 și centrul în punctul $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

R : $5x^2 + 5y^2 + 8x - 6y - 15 = 0$.

11. Să se afle punctele de intersecție ale axei Ox cu cercul care are ca diametru segmentul care unește punctele $(1, 2)$ și $(-3, -4)$.

R : $(-1 \pm 2\sqrt{3}, 0)$.

12. Să se afle ecuația cercului care are ca diametru segmentul dreptei $3x - 4y + 12 = 0$, cuprins între axele de coordonate.

R : $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$.

13. Să se afle ecuația cercului care are ca diametru coarda comună a cercurilor.

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0.$$

R : $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Să se afle ecuația cercului cu raza a, tangent la axa Oy în originea coordonatelor.

R: $x^2 + y^2 \pm 2ax = 0$.

15. Să se afle centrul și raza cercului

$$x^2 + y^2 + 2x + 16y - 42 = 0.$$

R: $(-1, -8)$; $\sqrt{107}$.

16. Să se afle centrul și raza cercului

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 3y - 10 = 0.$$

R: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$; $\frac{5}{4}\sqrt{5}$.

17. Să se afle ecuația dreptei care trece prin centrul cercului $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ și perpendiculară pe dreapta $x - 2y + 1 = 0$.

R: $2x + y - 3 = 0$.

18. Să se afle ecuația cercului care trece prin punctele $(0, 2)$, $(2, 0)$ și $(0, 0)$.

R: $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

19. Să se afle ecuația cercului circumscris triunghiului cu vârfurile în punctele $(0, 1)$, $(-2, 0)$ și $(0, -1)$.

R: $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 = 0$.

20. Să se afle ecuația cercului, circumscris triunghiului isoscel, a cărui înălțime este egală cu 5 unități de lungime și care are ca bază segmentul cuprins între punctele $(-4, 0)$, $(4, 0)$.

R: $5x^2 + 5y^2 \pm 9y - 80 = 0$.

21. Să se afle ecuația cercului circumscris triunghiului care are ca laturi dreptele: $x + 2y - 3 = 0$, $3x - y - 2 = 0$, $2x - 3y - 6 = 0$.

R: $7x^2 + 7y^2 - 19x + 11y - 6 = 0$.

22. Să se afle ecuația cercului tangent la axele de coordonate și care trece prin punctul $(4, -2)$.

R: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$.
$x^2 + y^2 - 20x + 20y + 100 = 0$.

23. Centrul unui cerc tangent la axele de coordonate se află pe dreapta $3x - 5y + 15 = 0$. Să se afle ecuația cercului.

R: $4x^2 + 4y^2 - 60x - 60y + 225 = 0$.
$64x^2 + 64y^2 + 240x - 240y + 225 = 0$.

24. Un cerc cu raza egală cu 5 unități de lungime trece prin punctele $(4, -2)$ și $(5, -3)$. Să se afle ecuația acestui cerc.

R: $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 12 = 0$;
$x^2 + y^2 - 16x - 2y + 40 = 0$.

25. Centrul unui cerc trece prin punctele $(-2, 4)$ și $(-1, 3)$ se află pe dreapta $2x - 3y + 2 = 0$. Să se afle ecuația acestui cerc.

R: $x^2 + y^2 + 26x + 16y - 32 = 0$.

26. Un cerc este tangent la axa Ox și trece prin punctele $(-1, 2)$ și $(6, 9)$. Să se afle ecuația lui.

R: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.
$x^2 + y^2 + 18x - 34y + 81 = 0$.

27. Să se afle ecuația cercului care trece prin punctul $(-3, 4)$ și este concentric cu cercul $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$.

R: $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$.

28. Un cerc este tangent la dreptele $x - 2 = 0$ și $x = 6$. Centrul lui se află pe dreapta $3x - y - 6 = 0$. Să se afle ecuația acestui cerc.

R: $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$.

29. Să se demonstreze că, atunci când ecuațiile a două cercuri se deosebesc numai prin valorile termenilor liberi (adică a termenilor care nu conțin coordonatele curente), cercurile exprimate prin aceste ecuații sunt concentrice.

30. Să se arate, că locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este o mărime constantă k (cu excepția cazului $k=1$) este un cerc.

31. Să se arate că locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor la laturile unui pătrat dat este o mărime constantă reprezintă un cerc.

32. Să se arate că locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor la vârfurile unui triunghi dat este o mărime constantă reprezintă un cerc.

33. Din punctele $(-a, 0)$ și $(a, 0)$ se duc perechi de drepte, astfel ca diferența unghiurilor de înclinare față de axa Ox a două drepte, care formează o pereche, să fie egală cu $\operatorname{arctg} \frac{1}{a}$. Să se arate că locul geometric al intersecției acestor drepte este un cerc.

Elipsa

34. Să se afle lungimile axelor, excentricitatea și coordonatele focarelor elipsei $9x^2 + 25y^2 = 225$.

R: $10;\ 6;\ \frac{4}{5};\ (\pm 4, 0)$.

35. Să se afle lungimile axelor, excentricitatea și coordonatele focarelor elipsei $3x^2 + 4y^2 = 2$.

R: $\frac{2}{3}\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\left(\pm\ \frac{1}{6}\sqrt{6}, 0\right)$.

36. Să se afle coordonatele vârfurilor și ale focarelor și excentricitatea elipsei $4x^2 + 2y^2 = 1$.

R: $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right);\ \left(0,\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right);\ \left(0,\ \pm\ \frac{1}{2}\right);\ \ \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

37. Să se determine valorile lui a și b pentru care elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trece prin punctele $(2, 3)$, $(-1, -4)$.

R: $\frac{1}{7}\sqrt{385},\ \ \frac{1}{3}\sqrt{165}$.

38. Să se afle ecuaţia elipsei, ştiind că două vârfuri au coordonatele $(\pm 4, 0)$ şi un focar are coordonatele $(2, 0)$.

R: $3x^2 + 4y^2 = 48$.

39. Două vârfuri ale unei elipse au coordonatele $(\pm 6, 0)$; coordonatele focarelor sunt $(\pm 4, 0)$. Să se afle ecuaţia elipsei.

R: $5x^2 + 9y^2 = 180$.

40. Să se afle ecuaţia elipsei ale cărei focare au coordonatele $(\pm 4, 0)$, iar lungimea axei mari este egală cu 10.

R: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

41. Să se afle ecuaţia elipsei, ştiind că coordonatele focarelor sunt $(0, \pm 3)$ şi lungimea axei mari este egală cu 12.

R: $4x^2 + 3y^2 = 108$.

42. Să se afle ecuaţia elipsei, la care lungimea axei mici este egală cu 6 şi unul din focare are coordonatele $(-4, 0)$.

R: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

43. Să se afle ecuaţia cea mai simplă a elipsei care trece prin punctele $M_1(6, 4)$ şi $M_2(-8, 3)$.

R: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

44. Să se afle ecuaţia cea mai simplă a elipsei care trece prin punctele $M_1\left(\sqrt{11}, -\frac{10}{3}\right)$ şi $M_2\left(-3\sqrt{3}, 2\right)$.

R: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

45. Axa mare a unei elipse se află pe axa Ox şi are lungimea 6; excentricitatea elipsei este egală cu $\frac{1}{2}$. Să se afle ecuaţia elipsei.

R: $3x^2 + 4y^2 = 27$.

46. Excentricitatea unei elipse este $\frac{1}{3}$, ordonata punctului elipsei, care are abscisa egală cu abscisa focarului, este egală cu 4 unităţi de lungime. Să se afle ecuaţia elipsei.

R: $8x^2 + 9y^2 = 162$.

47. Să se afle ecuaţia elipsei, ştiind că focarele au coordonatele $(0, \pm 5)$ şi că excentricitatea este $\frac{2}{3}$.

R: $36x^2 + 20y^2 = 1125$.

48. Să se afle ecuaţia elipsei, ştiind că excentricitatea este $\frac{1}{3}$ şi abscisa unui focar $\frac{3}{2}$.

R: $8x^2 + 9y^2 = 162$.

49. Să se afle excentricitatea elipsei, știind că lungimea ordonatei punctului ei, a cărui abscisă este egală cu abscisa focarului este egală cu $\frac{2}{3}$ din lungimea semiaxei mici.

R: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

50. Să se afle excentricitatea elipsei, știind că dreapta care unește vârful din dreapta al elipsei cu cel superior este paralelă cu dreapta care unește originea cu capătul ordonatei pozitive a punctului elipsei, care are abscisa egală cu abscisa focarului stâng.

R: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

51. Să se afle punctele de intersecție ale elipsei $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ cu dreptele: a) $y = 4x$; b) $x = 6$; c) $2x - y - 9 = 0$; d) $x - y + 8 = 0$.

R: a) $\left(\pm \frac{6}{7}, \pm \frac{24}{7}\right)$; b) (6, 0); c) (3, —3), $\left(\frac{69}{13}, \frac{21}{13}\right)$; d) nu se intersectează.

52. O linie dreaptă se deplasează astfel, încât segmentul ei, cuprins între axele de coordonate, are o lungime constantă. Să se arate că fiecare punct al acestei drepte descrie o elipsă.

Hiperbola

53. Să se afle excentricitatea, coordonatele focarelor și ecuațiile asimptotelor hiperbolei

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

R: $\frac{1}{5}\sqrt{29}$; $(\pm \sqrt{29}, 0)$; $2x \pm 5y = 0$.

54. Să se afle excentricitatea, coordonatele focarelor și ecuațiile asimptotelor hiperbolei $4x^2 - 9y^2 = 36$.

R: $\frac{1}{3}\sqrt{13}$; $(\pm \sqrt{13}, 0)$; $2x \pm 3y = 0$.

55. Să se afle excentricitatea, coordonatele focarelor și ecuațiile asimptotelor hiperbolei.

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

R: $\frac{5}{4}$; $(0, \pm 5)$; $4x \pm 3y = 0$.

56. Să se afle ecuația hiperbolei, știind că focarele au coordonatele $(\pm 4, 0)$ iar axa reală este egală cu 6.

R: $7x^2 - 9y^2 = 63$.

57. Să se afle ecuația hiperbolei care are drept asimptote dreptele $y = \pm \frac{3}{5} x$ și ale cărei focare au coordonatele $(\pm 2, 0)$.

R: $153x^2 - 425y^2 = 450$.

58. Să se afle ecuația hiperbolei care are drept asimptote dreptele $y = \pm \frac{3}{4} x$ și trece prin punctul $(2, 1)$.

R: $9x^2 - 16y^2 = 20$.

59. Să se afle ecuația hiperbolei echilatere care trece prin punctul $(3, -1)$.

R: $x^2 - y^2 = 8$.

60. Să se afle ecuația cea mai simplă a hiperbolei, știind că ea trece prin punctele $\left(5, \frac{4}{3}\right)$ și $\left(\sqrt{34}, -\frac{5}{3}\right)$.

R: $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$.

61. Să se afle punctele de intersecție ale hiperbolei $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ cu dreptele

a) $2x + 3y = 0$; b) $4x - 3y = 0$; c) $20x + 21y + 12 = 0$; d) $2x - y - 3 = 0$.

R: a) $\left(\pm 2\sqrt{3}, \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; b) nu se intersectează (dreapta este o asimptotă a hiperbolei); c) $\left(5, -\frac{16}{3}\right), \left(-\frac{15}{4}, 3\right)$; d) nu se intersectează.

62. Să se afle punctele de intersecție ale hiperbolei echilatere $x^2 - y^2 = 16$ cu cercul $x^2 + y^2 = 34$.

R: $(5, 3)$; $(-5, 3)$; $(-5, -3)$; $(5, -3)$.

63. Să se afle ecuația hiperbolei, știind că coordonatele focarelor sunt $(0, \pm 3)$ și axa reală egală cu 4.

R: $5y^2 - 4x^2 = 20$.

64. Să se afle unghiul φ între asimptotă și axa reală a hiperbolei, știind că distanța dela vârf la centru este egală cu $\frac{2}{3}$ din distanța dela focare la centru.

R: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

65. Două vârfuri ale unei elipse coincid cu focarele unei hiperbole, ale cărei vârfuri se află în focarele elipsei. Ecuația elipsei este $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Să se afle ecuația hiperbolei.

R: $9x^2 - 7y^2 = 63$.

66. Să se arate că excentricitatea unei hiperbole echilatere este egală cu raportul dintre diagonala unui pătrat, având laturile egale cu axa hiperbolei și latura acestui pătrat.

Scanned with OKEN Scanner

67. Să se calculeze excentricitatea unei hiperbole, știind că unghiul format de asimptotele ei este egal cu : a) 90° ; b) 60°.

R : a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

68. Să se demonstreze că produsul distanțelor unui punct oarecare al hiperbolei la asimptote este constant.

69. Printr'un punct oarecare P al unei hiperbole trece o dreaptă paralelă cu axa reală a hiperbolei; această dreaptă taie asimptotele în punctele Q și R. Să se arate, că $PQ \cdot PR = a^2$.

70. Un punct se deplasează în plan astfel, încât produsul coeficienților unghiulari ai dreptelor care unesc acest punct cu punctele $(-a, 0)$ și $(a, 0)$ este constant. Să se arate că în mișcarea sa punctul descrie, fie o elipsă, fie o hiperbolă.

Parabola

71. Să se scrie ecuația parabolei, știind că :

a) axa Ox este axa de simetrie a parabolei, vârful se află în origine și distanța dela vârf la focar este de 6 unități de lungime;

b) parabola este simetrică în raport cu axa Ox, trece prin punctul $(2, -5)$ și vârful se află în origine;

c) parabola este simetrică în raport cu axa Ox, trece prin punctul $(-2, 4)$ și vârful se află în origine;

d) parabola este simetrică în raport cu axa Oy, focarul se află în punctul $(0,4)$ și vârful în origine;

e) parabola este simetrică în raport cu axa Oy, trece prin punctul $(6, 3)$ și are vârful în origine;

f) parabola este simetrică în raport cu axa Oy, trece prin punctul $(-6, -3)$ și are vârful în origine.

R : a) $y^2 = 24x$; b) $y^2 = \frac{25}{2}x$; c) $y^2 = -8x$; d) $x^2 = 16y$; e) $x^2 = 12y$; f) $x^2 = -12y$,

72. Punctul (a, b) este vârful unei parabole, iar o dreaptă paralelă cu axa Ox este axa ei de simetrie. Să se afle ecuația parabolei, cunoscând că parametrul ei este p.

R : $(y - b^2) = \pm 2p(x - a)$.

Indicație. v. § 27.

73. O parabolă trece prin punctul $(-1, -1)$ și are vârful în punctul $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$. Să se afle ecuația parabolei, știind că axa ei este paralelă cu axa Oy.

R : $12x^2 + 36x + y + 25 = 0$.

74. Vârful unei parabole se află în punctul $(2, 3)$; parabola trece prin origine și axa ei este paralelă cu axa Ox. Să se găsească ecuația parabolei.

R : $2y^2 - 12y + 9x = 0$.

75. Să se demonstreze că ecuația $x = My^2 + Ny + P$ reprezintă o parabolă

Indicație. v. § 27.

76. Să se afle coordonatele vârfului și ale focarului și ecuațiile axei și directoarei parabolei $y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$.

R : $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$; $(2, -2)$; $y + 2 = 0$; $x + 1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

77. Să se afle coordonatele vârfului și focarului și ecuațiile axei și directoarei parabolei $4x^2 + 4x + 3y - 2 = 0$.

R: $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{16}\right)$; $2x + 1 = 0$; $16y - 19 = 0$.

78. Să se afle ecuația parabolei, știind că originea coincide cu focarul și axa Ox cu axa parabolei; parametrul este p.

R: $y^2 = \pm 2px + p^2$.

79. Să se afle ecuația parabolei, luându-se axa curbei și directoarea ca axe Ox și Oy, parametrul fiind p.

R: $y^2 = \pm 2px - p^2$.

80. Să se afle ecuația parabolei, al cărei vârf se află în punctul (3, 2) și focarul în punctul (5, 2).

R: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

81. Să se afle ecuația parabolei, al cărei vârf se află în punctul (—1, —2) și focarul în punctul (—1, —4).

R: $x^2 + 2x + 8y + 17 = 0$.

82. Să se afle ecuația parabolei, având focarul în punctul (2,—1) și ca directoare dreapta $y - 4 = 0$.

R: $x^2 - 4x + 10y - 11 = 0$.

83. Să se afle ecuația parabolei care are ca vârf punctul (—2,—5) și ca directoare dreapta $x - 3 = 0$.

R: $y^2 + 10y + 20x + 65 = 0$.

84. Dreapta $y + 4 = 0$ este directoarea unei parabole. Vârful ei este în punctul (5,—2). Să se afle ecuația parabolei.

R: $x^2 - 10x - 8y + 9 = 0$.

85. Să se afle coordonatele vârfului, focarului și ecuațiile axei și directoarei parabolei: a) $x^2 - 8x - 16y + 32 = 0$; b) $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$; c) $3x^2 - 2x + y + 5 = 0$; d) $4y^2 - 8y - 13x - 12 = 0$; e) $y = 10x - x^2$; f) $y^2 - 4x + 8 = 0$.

R: a) (4, 1); (4, 5); $x = 4$: $y + 3 = 0$;

b) (4, 1); (4,— 1); $x = 4$; $y - 3 = 0$;

c) $\left(\frac{1}{3}, -4\frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3}, -4\frac{3}{4}\right)$; $3x - 1 = 0$; $12y + 55 = 0$;

d) $\left(-\frac{16}{13}, 1\right)$; $\left(-\frac{87}{208}, 1\right)$; $y = 1$; $208x + 425 = 0$.

e) (5, 25); $\left(5, 24\frac{3}{4}\right)$; $x = 5$; $4y - 101 = 0$;

f) (2, 0); (3, 0); $y = 0$; $x - 1 = 0$.

86. Un arc de pod are formă de parabolă. Să se determine parametrul p al parabolei, știind că deschiderea arcului este de 24 m, iar înălțimea de 6 m.

R: $p = 12$.

Scanned with OKEN Scanner

87. In fig. 47 se arată secțiunea longitudinală a unei oglinzi parabolice. Să se afle abscisa focarului oglinzii după datele din figură.

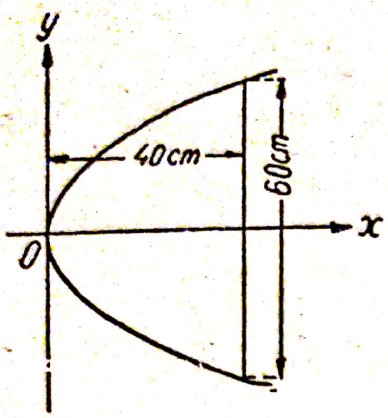

Fig. 47.

R: $x = 5{,}625$.

88. Presupunând că un cablu care unește punctele M și N (fig. 48) are forma unei parabole, să se afle ecuația parabolei pentru $p = 0{,}1$; $h = 1$ și $l = 10$.

R: $y = -0{,}02\ (1 + \sqrt{11})x + 0{,}002\ (6 + \sqrt{11})x^2$.

Indicații. Se va lua ecuația parabolei sub forma $y = Ax^2 + Bx + C$. Ordonata vârfului se determină din relația: $b = \dfrac{4AC - B^2}{4A}$.

Deosebit de aceasta, parabola trece prin punctele M și N ale căror coordonate sunt cunoscute. Pe baza acestor condiții, se pot scrie trei ecuații în raport cu coeficienții A, B, C.

89. Să se afle punctele de intersecție a două parabole care au vârful comun în origine și focarele în punctele (2, 0) și (0, 2).

R: (0, 0); (8, 8).

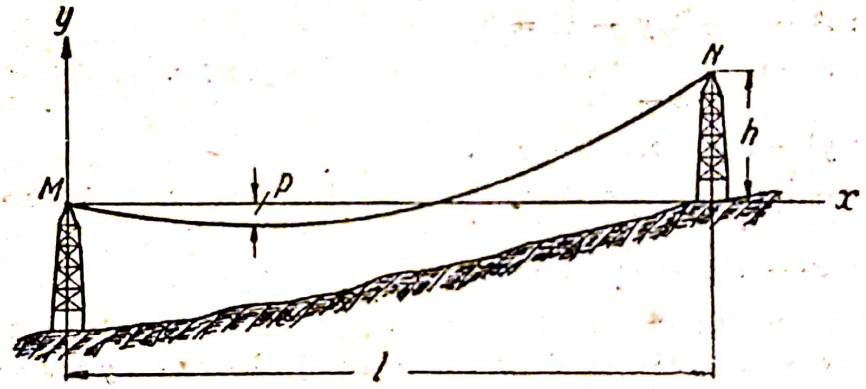

Fig. 48.

90. Să se afle punctele de intersecție ale elipsei $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ cu parabola, al cărei vârf se află în centrul elipsei, iar focarul parabolei coincide cu focarul drept al elipsei.

R: $\left(\dfrac{5}{2}, \pm 2\sqrt{15}\right)$.

91. La parabola $y^2 = 2px$ se înscrie un triunghi echilateral, care are un vârf comun cu vârful parabolei. Să se afle lungimea laturii triunghiului.

R: $4p\sqrt{3}$.

92. Se duc drepte prin origine. Să se arate că locul geometric al punctelor situate pe aceste drepte, având ordonatele egale cu abscisele punctelor de intersecție ale dreptelor cu dreapta $y = a$, este o parabolă.

Scanned with OKEN Scanner

93. Să se afle locul geometric al punctelor care au proprietatea că distanţa cea mai scurtă la un cerc dat este egală cu distanţa punctului la un diametru fix al cercului.

R: Două parabole.

94. Segmentele AB şi CD perpendiculare între ele sunt diametrii unui cerc. Din fiecare punct al cercului se duc segmentele AM şi BM. Segmentul AM taie diametrul CD în punctul N; prin punctul N se duce o dreaptă paralelă cu diametrul AB, care taie segmentul BM în punctul P. Să se arate că locul geometric al punctelor P este o parabolă.

95. Vârful unui triunghi a cărui bază rămâne neschimbată, se deplasează astfel, încât suma tangentelor unghiurilor triunghiului, adiacente bazei este constantă. Să se arate că curba descrisă de vârful triunghiului este o parabolă.

96. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr'un punct dat şi sunt tangente la o dreaptă dată.

R: O parabolă.

97. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente la un cerc dat şi la o dreaptă dată.

R: O parabolă.

Ecuaţiile parametrice ale curbelor

98. Să se construiască graficele curbelor date prin ecuaţiile:

a) $x = t^2,\ y = t + 1$; b) $x = \frac{4}{t^2},\ y = \frac{4}{t}$;

c) $x = t,\ y = \frac{a^3}{a^2+t^2}$; d) $x = \frac{2a}{1+t^2}$; $y = \frac{2a}{t(1+t^2)}$.

99. Să se afle ecuaţiile parametrice ale parabolei $y^2 = 2px$, luând ca parametru t coeficientul unghiular al dreptei care uneşte un punct al parabolei cu originea.

R: $x = \frac{2p}{t^2},\ y = \frac{2p}{t}$

100. Să se afle ecuaţiile parametrice ale elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, luând ca parametru t coeficientul unghiular al dreptei, care uneşte un punct al elipsei cu originea.

R: $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2t^2}},\ y = \pm \frac{abt}{\sqrt{b^2 + a^2t^2}}$.

101. Dintr'un punct M al elipsei (v. fig. 45), se duce o dreaptă paralelă cu OL. Notăm cu Q şi R punctele în care dreapta dusă taie axele Ox şi Oy*). Utilizând ecuaţiile parametrice ale elipsei $x = a\cos t$; $y = b\sin t$, să se arate, că $MQ = b$ şi $MR = a$.

102. Legea mişcării unui proiectil care porneşte cu viteza iniţială v_0, sub un unghi α faţă de orizont este definită prin ecuaţiile:

$$x = v_0 t\cos\alpha,$$

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

---

*) In fig. 45 această dreaptă nu figurează.

(g — acceleraţia gravitaţiei, t — timpul). Să se afle ecuaţia traiectoriei prin eliminarea parametrului t.

R: $2v_0^2y^2\cos^2\alpha = v_0^2x\sin 2\alpha - gx^2$.

103. Folosind ecuaţiile din problema 102, să se afle cât timp şi la ce distanţă dela gura de foc proiectilul va cădea pe pământ.

R: $t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$; $x = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

104. Folosind ecuaţiile din problema 102, să se afle ce unghi de înclinare trebue dat ţevii tunului pentru a obţine distanţa cea mai mare de cădere a proiectilului.

R: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

PARTEA A DOUA

ELEMENTELE CALCULULUI DIFERENȚIAL

CAPITOLUL IV

NOȚIUNI ASUPRA FUNCȚIILOR ȘI ASUPRA TEORIEI LIMITELOR

§ 32. Câteva relații legate de noțiunea de valoare absolută a unui număr

In analiza matematică se iveşte mereu nevoia de a cerceta relaţiile dintre valorile absolute ale unor expresii. Deaceea vom reaminti în acest paragraf formulele de bază, care se referă la această problemă.

Valoarea absolută a unui număr pozitiv se numeşte însuşi acel număr; valoarea absolută a unui număr negativ se numeşte numărul, luat cu semn contrar. Valoarea absolută a numărului a se notează cu simbolul.

$$|a|.$$

Astfel, $|5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$;

$|a| = a$, dacă $a > 0$;

$|a| = -a$, dacă $a < 0$.

1. *Valoarea absolută a unei sume algebrice este mai mică sau cel mult egală cu suma valorilor absolute ale termenilor sumei:*

$$|a + b + c + \ldots + v| \leqslant |a| + |b| + |c| + \ldots + |v|. \qquad (1)$$

Exactitatea acestei propoziţii se confirmă uşor prin exemplele:

1. $|3 + 5 + 8| = |16| = 16$;
   $|3| + |5| + |8| = 3 + 5 + 8 = 16$;

prin urmare:

$$|3 + 5 + 8| = |3| + |5| + |8|.$$

2. $|-3 - 5 - 8| = |-16| = 16$;
   $|-3| + |-5| + |-8| = 3 + 5 + 8 = 16$;

deci :

$$|-3-5-8|=|-3|+|-5|+|-8|.$$

3. $|3-5+8|=|6|;$

$$|3|+|-5|+|8|=3+5+8=16;$$

deci :

$$|3-5+8|<|3|+|-5|+|8|.$$

Evident că relaţia (1) va avea semnul egalităţii, când toţi termenii au semne de acelaşi fel şi semnul inegalităţii, când termenii nu au acelaşi semn.

Prin urmare, în cazul general, adică atunci când semnele termenilor unei sume algebrice pot fi la fel sau diferite, putem spune numai, că *valoarea absolută a sumei algebrice nu depăşeşte* (*adică rămâne fie mai mică, fie egală cu*) *suma aritmetică a valorilor absolute ale termenilor.*

2. *Valoarea absolută a diferenţei a două numere este mai mare sau egală cu diferenţa valorilor absolute ale descăzutului şi scăzătorului.*

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Această relaţie se verifică deasemenea uşor prin exemple.

3. *Valoarea absolută a produsului unui număr oarecare de factori nu depinde de semnele factorilor. Deaceea vom avea întodeauna :*

$$|a\,b\cdot c\ldots v|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\ldots|v|.$$

4. *Valoarea absolută a câtului nu depinde de semnele deîmpărţitului şi împărţitorului. Deaceea vom avea totdeauna :*

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|$$

§ 33. Mărimi variabile şi constante

Toate mărimile care se întâlnesc la cercetarea unei probleme oarecare, se împart în *variabile* şi *constante.*

Se numeşte mărime variabilă o mărime care poate lua, în condiţiile problemei date, valori numerice diferite, fie că se află cuprinse între limite determinate, fie că sunt valori oarecare.

Mărimea constantă se numeşte o mărime, care, în tot timpul cercetării problemei, păstrează aceeaşi valoare numerică.

Astfel, de exemplu, cum am văzut în geometria analitică, coordonatele curente (x, y) ale unui punct al unei linii drepte sunt mărimi variabile, iar parametrii, care definesc poziţia dreptei în raport cu sistemul de coordonate ales, sunt mărimi constante.

Scanned with OKEN Scanner

Enunțul fiecărei probleme definește, care dintre mărimile ce intervin în problemă trebue considerate variabile și care constante.

Astfel, de exemplu, într'un triunghi, al cărui vârf se deplasează în lungul unei drepte paralele cu baza, unghiurile și două laturi (înafară de bază) sunt mărimi variabile, iar baza, înălțimea, aria și suma unghiurilor sunt mărimi constante.

Dacă însă vârful triunghiului se deplasează în lungul unei drepte care nu este paralelă cu baza, atunci și înălțimea și aria devin mărimi variabile, iar mărimi constante rămân numai baza și suma unghiurilor.

Schimbând condițiile problemei, și baza poate deveni variabilă, însă suma unghiurilor triunghiului va fi totdeauna de 180°.

De aici rezultă că trebue să deosebim mărimi constante de două feluri : mărimi care păstrează valori numerice determinate numai pentru condițiile problemei date și mărimi care au o valoare numerică invariabilă, independent de condițiile problemei.

Mărimile de primul fel se numesc uneori *parametri*, iar cele de felul al doilea mărimi *absolut constante*.

Astfel, în ecuația dreptei prin tăieturi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

mărimile a și b au pentru dreapta dată valori constante determinate; pentru altă dreaptă mărimile a și b au alte valori numerice. Prin urmare a și b sunt parametri.

Printre constantele absolute se numără mărimi ca suma unghiurilor unui triunghi, raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul (numărul π), $\sqrt{2}$, 7, $5\frac{3}{4}$ și altele.

Mărimile constante se notează deobicei cu primele litere ale alfabetului : $a, b, c,...,$ iar cele variabile cu ultimele litere : $x, y, z,...$

In cele ce urmează, vom presupune că toate valorile considerate ale mărimilor sunt numere reale, iar în cazul introducerii, atunci când va fi nevoie, a unor numere complexe, vom menționa aceasta în mod expres.

§ 34. Noțiunea de funcție

1. In științele naturale, fizică, tehnică, matematică nu se studiază modificarea *unei* mărimi variabile luată în mod izolat, ci *dependența* între câteva mărimi variabile. In cazul cel mai simplu, este vorba despre dependența între două variabile. Acest fel de dependență îl vom cerceta în acest curs.

De exemplu, ştim că spaţiul s (în metri) parcurs de un corp în cădere, în timp de t secunde, neglijând rezistenţa mediului, se determină cu ajutorul formulei :

$$s = \frac{gt^2}{2}, \qquad (2)$$

unde $g = 9{,}81$ m/s^2 este acceleraţia forţei gravităţii. Formula (2) defineşte dependenţa între t şi s.

Să presupunem că ne interesează lungimea drumului parcurs de acest corp într'un anumit interval de timp. Atunci vom *atribui* variabilei t acele valori numerice care ni se cer. Valorile variabilei s vor fi determinate, în baza relaţiei (2), *corèspunzător* valorilor atribuite variabilei t. In felul acesta, mărimea s nu poate varia în mod arbitrar, ci numai în *dependenţă* de modificările variabilei t.

Astfel, caracterul modificării variabilei s se deosebeşte de caracterul modificării variabilei t. Deosebirea în caracterul modificării atrage după sine şi o deferenţiere în denumirea variabilelor. Mărimea căreia i se pot atribui valori numerice oarecare se numeşte *variabilă independentă* sau *argument*.

Variabila care ia valori numerice determinate, corespunzătoare valorilor atribuite argumentului, se numeşte *variabilă dependentă* sau *funcţie*.

Deci, în condiţiile problemei cercetate, variabila t este argumentul, iar variabila s funcţia. Se spune că lungimea s a drumului parcurs de corp este o funcţie a timpului t.

Dependenţa (2) care leagă în cazul nostru argumentul t şi funcţia s se numeşte *dependenţă funcţională*.

Se poate întâmpla să ne intereseze problema inversă, adică să ne intereseze să ştim în ce interval de timp corpul parcurge un drum de o anumită lungime. Este evident, că aceeaşi dependenţă (2) permite rezolvarea şi a acestei probleme inverse, întrucât pentru fiecare valoare *dată* s, putem să determinăm valoarea *corespunzătoare* t :

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Evident, în această problemă rolul variabilelor t şi s se schimbă : acum variabila s este argumentul, iar variabila t funcţia.

In felul acesta, prin condiţiile problemei, se determină care variabilă trebue considerată drept argument şi care drept funcţie, într'o anumită dependenţă funcţională.

Să mai cercetăm câteva exemple de dependenţă funcţională.

Dacă luăm raza r a cercului ca argument, lungimea cercului, s, este o funcţie a variabilei r. Dependenţa funcţională între aceste variabile se defineşte prin formula cunoscută :

$$s = 2\pi r.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă într'un vas oarecare este închis un gaz ideal, aflat sub presiunea unui piston, atunci între presiunea p a pistonului şi volumul V al gazului, există dependenţa definită prin relaţia :

$$p \cdot V = C, \tag{3}$$

unde C este o mărime constantă. Să presupunem că, potrivit condiţiilor problemei, p este o variabilă independentă. Atunci, în virtutea dependenţei (3), îi corespunde variabilei V o valoare bine determinată pentru fiecare valoare atribuită argumentului p. Astfel, volumul V al gazului este o funcţie de presiunea p.

Să însemnăm prin x, y şi z lungimile dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic. Din geometrie ştim că volumul V al paralelipipedului se determină prin formula :

$$V = x \cdot y \cdot z. \tag{4}$$

Egalitatea (4) defineşte dependenţa între patru mărimi variabile. Dacă după condiţiile problemei se pot atribui valori arbitrare variabilelor x, y şi z, atunci dependenţa (4) defineşte pe V ca funcţie de trei variabile independente x, y şi z.

2. In exemplele cercetate am înţeles prin fiecare variabilă o anumită mărime concretă : în primul exemplu variabila t exprima timpul, iar s lungimea drumului parcurs de corpul în cădere ; în exemplul al treilea am însemnat cu litera p mărimea presiunii pistonului, iar cu litera V volumul gazului. Spre deosebire de aceasta, matematica se ocupă cu cercetarea dependenţelor funcţionale în general, fără a se interesa de sensul concret, fizic al mărimilor variabile, legate prin dependenţa funcţională. O valoare variabilă este în matematică, pur şi simplu o mărime care poate primi diferite valori numerice.

Pornind dela această prezentare a mărimii variabile, formulăm astfel definiţia funcţiei :

O mărime variabilă y se numeşte funcţie de mărimea variabilă independentă x, atunci când fiecărei valori a mărimii x îi corespunde o valoare determinată pentru y.

§ 35. Notarea generală a funcţiei

1. Pentru a indica faptul, că y este o funcţie a variabilei independente x, se scrie :

$$y = f(x),\ y = \varphi(x),\ y = F(x),\ \text{etc.}$$

Aceasta se citeşte în felul următor : „igrec egal ef de ix", „igrec egal fi de ix", etc. Literele f, φ, F, ..., caracterizează regula după care se obţine valoarea variabilei y, corespunzătoare unei valori date x.

Scanned with OKEN Scanner

Deaceea, dacă considerăm simultan mai multe funcţii, caracterizate prin *legi diferite*, care definesc modificarea lor în dependenţă cu modificarea argumentului, atunci trebue puse litere diferite înaintea parantezei care conţine notarea argumentului.

Dacă pentru funcţia $y = f(x)$ dorim să desemnăm o valoare *particulară* care corespunde unei valori particulare, alese, a lui x, egală cu a, atunci ne servim de simbolul : $f(a)$. De exemplu dacă

$$y = f(x) = 3x^2 - 8x + 2,$$

atunci obţinem pentru $x = 2$:

$$y = f(2) = 3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 2 = -2 ;$$

pentru $x = a$ obţinem :

$$y = f(a) = 3a^2 - 8a + 2 :$$

pentru $x = b - 1$ obţinem :

$$y = f(b-1) = 3(b-1)^2 - 8(b-1) + 2 = 3b^2 - 14b + 13.$$

2. Dependenţa funcţională între mai multe variabile defineşte o *funcţie de mai multe variabile.*

Ca exemplu al unei funcţii de mai multe variabile poate servi volumul unui con circular, care depinde de două argumente : raza bazei conului r şi înălţimea h ;

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Pentru notarea generală a unei funcţii de mai multe variabile se aplică acelaşi principiu ca şi pentru o funcţie de o singură variabilă. Astfel, dorind să exprimăm că volumul conului este o funcţie a razei bazei, r şi a înălţimii h, putem scrie :

$$V = f(r, h).$$

3. Formula $y = f(x)$ poate fi considerată ca o ecuaţie rezolvată în raport cu y.

Uneori funcţiile se dau cu ajutorul unor ecuaţii, nerezolvate în raport cu y : se spune că funcţia este dată sub forma *implicită* ; de exemplu, în ecuaţia

$$Ax + By + C = 0$$

y este o funcţie implicită de x, întrucât este evident că pentru modificarea arbitrară a lui x, variabila y va lua valori *determinate*, condiţionate

Scanned with OKEN Scanner

prin aceea că x şi y trebue să satisfacă ecuaţia de mai sus. In mod analog, funcţia y, definită prin ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

este deasemenea o funcţie implicită a argumentului x.

Este evident că, în cazul general, o funcţie dată implicit poate fi exprimată printr'o ecuaţie de forma :

$$F(x, y) = 0.$$

§ 36. Despre determinarea funcţiilor

Definiţia funcţiei nu ne dă nici un fel de indicaţii asupra modului cum se stabilesc legăturile între funcţii şi argumente. Aceste moduri pot fi foarte variate. In analiza matematică funcţiile sunt date mai des cu ajutorul unor formule. In această carte vom găsi acest fel de legătură între funcţie şi argument. In paragraful precedent am întâlnit câteva exemple de funcţii date prin formule.

In ştiinţele naturale şi în tehnică sunt dese cazurile când dependenţa dintre funcţie şi argument nu se defineşte prin formule, ci se stabileşte prin experienţe. Atunci legătura dintre funcţie şi argument poate fi exprimată cu ajutorul tabelelor. Câteodată, în astfel de cazuri, se caută să se compună formulele care exprimă aproximativ dependenţa funcţională. Formulele astfel obţinute se numesc formule *empirice*.

Uneori este convenabil să se exprime legătura funcţională nu printr'o formulă empirică, ci cu ajutorul unui grafic aproximativ *).

§ 37. Reprezentarea geometrică a funcţiei

1. Studiind geometria analitică, am văzut că funcţia $y = kx + b$ se reprezintă geometric printr'o linie dreaptă.

Inafara acestei funcţii, am cunoscut acolo şi funcţiile :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sau în formă explicită : $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sau în formă explicită : $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,

$y^2 = 2px$ sau în formă explicită : $y = \pm\sqrt{2px}$.

*) Despre graficele funcţiilor v. paragraful următor.

Aceste funcţii se reprezintă geometric sub forma curbelor : elipsă, hiperbolă şi parabolă. Elevii cunosc deasemenea funcţiile trigonometrice şi graficele lor.

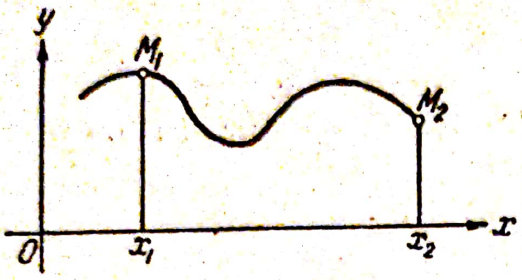

Fig. 49.

Faptul că toate funcţiile arătate se reprezintă geometric sub formă de curbe nu este întâmplător. Nu este greu de văzut că funcţia

$$y = f(x)$$

(în cazurile cele mai simple) reprezintă în general din punct de vedere geometric, o linie curbă oarecare.

Vom considera x şi y drept coordonatele unui punct în planul Oxy. Pentru fiecare valoare x, funcţia $f(x)$ ia o anumită valoare y.

Să presupunem că pentru $x = x_1$, y ia valoarea $y = y_1$. Să construim punctul (x_1, y_1) (punctul M_1 din fig. 49). Dăm lui x valoarea x_2 şi presupunem că valoarea corespunzătoare a lui y va fi y_2. Să construim punctul $M_2(x_2, y_2)$. Vom varia acum pe x în mod continuu dela x_1 la x_2, obligându-l să treacă succesiv prin toate valorile intermediare dintre x_1 şi x_2. Dreapta x_1M_1 va începe să se deplaseze şi capătul ei M_1 va descrie astfel o curbă anumită (fig. 49).

Diferitelor forme particulare ale funcţiei $y = f(x)$ le corespund curbe diferite.

Să cercetăm, ca exemplu, construcţia graficului funcţiei :

$$y = x^3 + 1.$$

Dăm argumentului x un număr de valori :

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}, +1, +\frac{3}{2}, +2;$$

calculăm valorile corespunzătoare ale funcţiei; pentru claritate aşezăm rezultatele calculelor în formă de tabelă :

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$+2$
y	-7	$-2\frac{3}{8}$	0	$+\frac{7}{8}$	1	$+1\frac{1}{8}$	$+1\frac{27}{64}$	$+2$	$+4\frac{3}{8}$	$+9$

Construind acum punctele, ale căror coordonate sunt date în tabelă şi unind aceste puncte printr'o linie continuă, vom obţine graficul funcţiei date (fig. 50).

Scanned with OKEN Scanner

2. Trebue observat însă că nu totdeauna funcţiile se reprezintă prin astfel de linii continue, care nu se întrerup. Cunoaştem din geometria analitică funcţia $y = \frac{m^2}{x}$, al cărei grafic este curba numită hiperbolă echilateră (§ 25); ea ne dă exemplul unui caz mai complicat: graficul funcţiei ne dă o curbă constând din două ramuri separate, care nu sunt unite între ele (v. fig. 37).

Alt exemplu de grafic întrerupt al unei funcţii este arătat în fig. 51. Pentru $x = c$ funcţia are valoarea reprezentată prin ordonata CM. Vedem, că funcţia trece printr'un salt dela valoarea corespunzătoare pentru $x = c$ la valorile următoare.

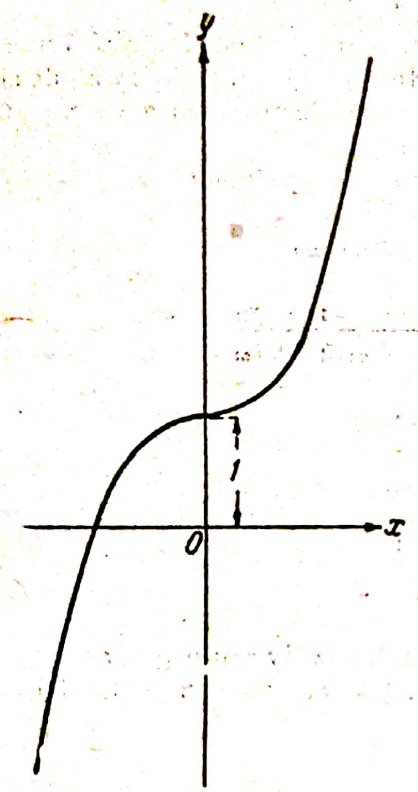

Fig. 50.

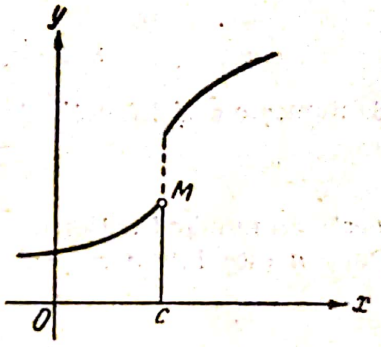

Fig. 51.

§ 38. Funcţiile elementare cele mai simple şi graficele lor

Vom enumera aici câteva categorii de funcţii foarte importante.

1. Funcţia raţională întreagă

Astfel se numeşte funcţia definită prin expresia

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

în care n este un număr întreg, pozitiv şi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante.
Pentru $n = 1$ avem funcţia liniară.

$$y = a_0x + a_1.$$

Pentru $n = 2$ funcţia pătratică :

$$y = a_0x^2 + a_1x + a_2.$$

După cum ştim din geometria analitică, graficul funcţiei liniare este o linie dreaptă, iar al funcţiei pătrate o parabolă, a cărei axă de simetrie este o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor (pentru $a_1 = a_2 = 0$, axa de simetrie este chiar axa ordonatelor).

Funcţia întreagă raţională se mai numeşte *polinom*.

2. Raportul a două polinoame

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m},$$

se numeşte *funcţie raţională fracţionară.*

3. Funcţia iraţională

Se numeşte astfel funcţia de forma :

$$y = x^a,$$

unde a este un număr fracţionar ireductibil, pozitiv sau negativ.

Dacă a este întreg şi pozitiv, funcţia este un caz particular al

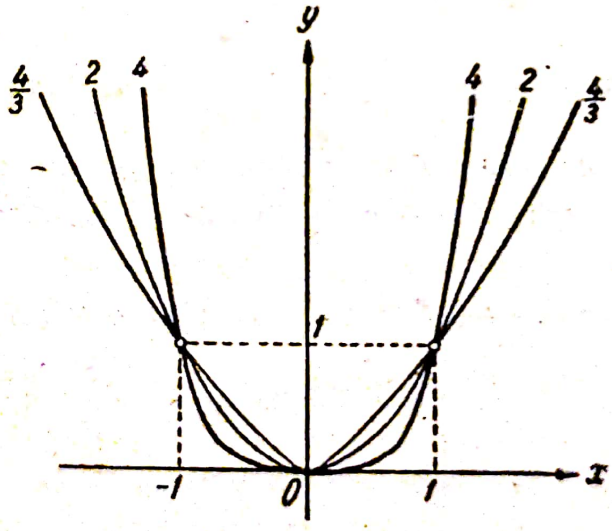

Fig. 52.

polinomului, adică o funcţie raţională întreagă. Dacă a este întreg dar negativ, funcţia este un caz particular al funcţiei raţionale fracţionare.

Ca exemple sunt date în fig. 52 graficele funcţiilor $y = x^a$ pentru

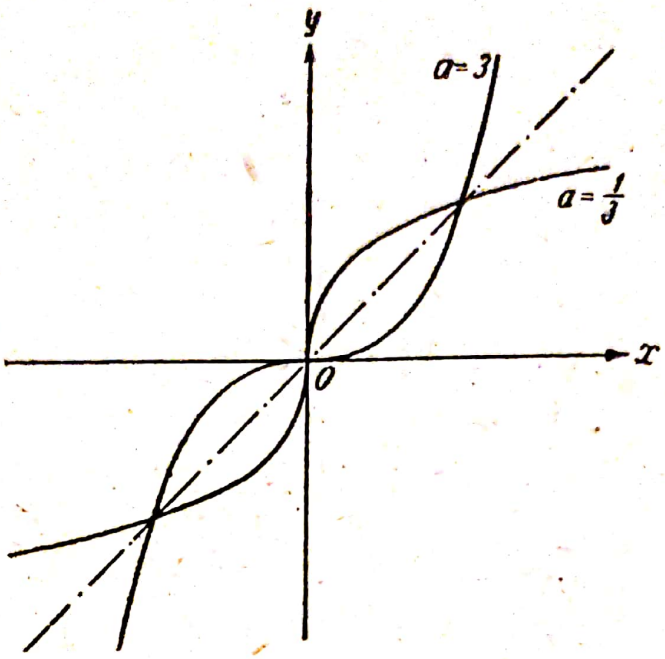

Fig. 53.

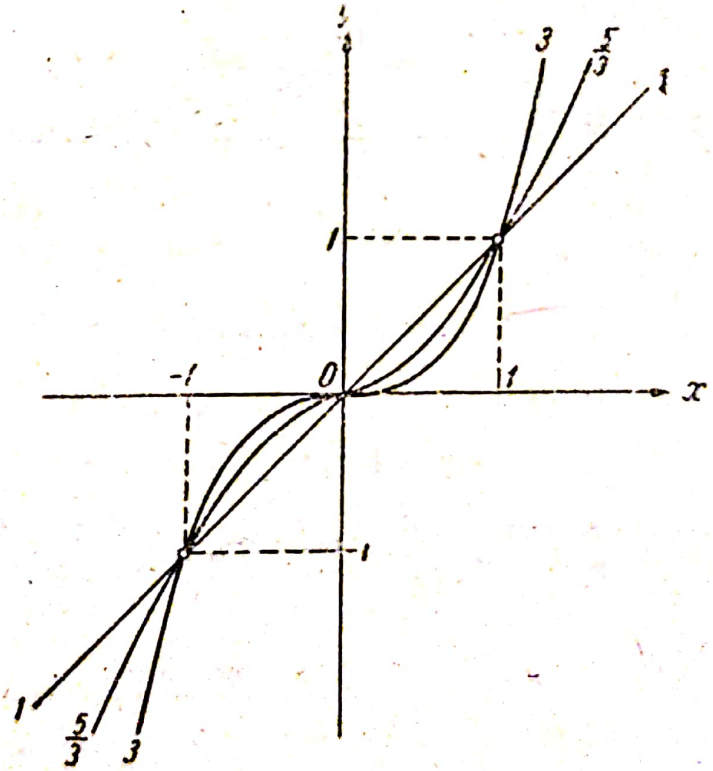

Fig. 54.

cazurile $a = 2$, $a = 4$, $a = \frac{4}{3}$; în fig. 53, pentru cazurile $a = 3$ şi $a = \frac{1}{3}$; în fig. 54, pentru cazurile $a = 1$, $a = \frac{5}{3}$, $a = 3$.

4. Funcția exponențială

Astfel se numește funcția de forma :

$$y = a^x,$$

unde a este un număr pozitiv, diferit de 1. Graficele funcției exponențiale pentru diferite valori ale lui a sunt date în fig. 55.

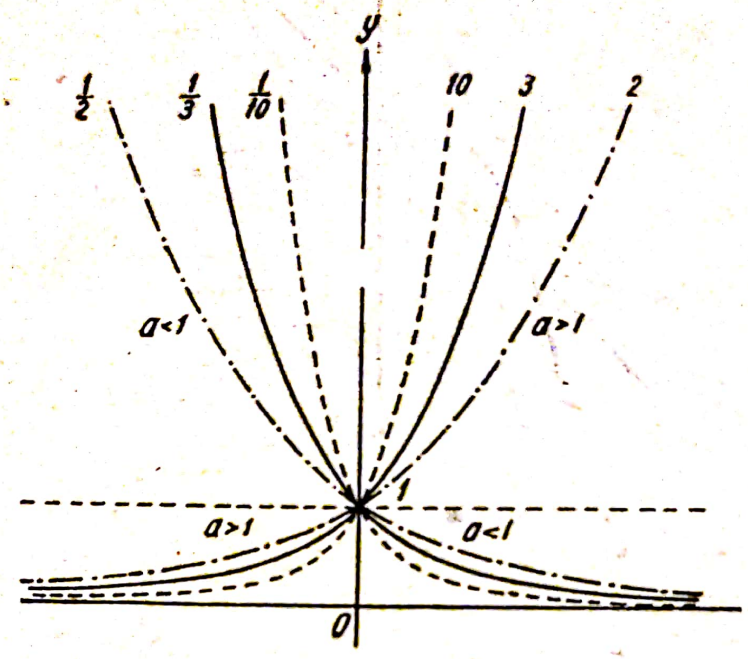

Fig. 55.

5. Funcția logaritmică

Este funcția de forma :

$$y = \log_a x,$$

unde a este un număr pozitiv, diferit de 1 ; x ia numai valori pozitive. In fig. 56 dăm graficele acestei funcții pentru diferite valori ale lui a.

6. Funcții trigonometrice

Ne vom limita să enumerăm numai funcțiile

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \operatorname{tg} x, \qquad y = \operatorname{ctg} x.$$

Exprimând arcul x în radiani, avem o metodă grafică extrem de simplă pentru a construi prin puncte graficele funcțiilor :

$$y = \sin x, \qquad y = \operatorname{tg} x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această metodă se lămureşte uşor, dacă cercetăm fig. 57 şi 58. Intrucât funcţia

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

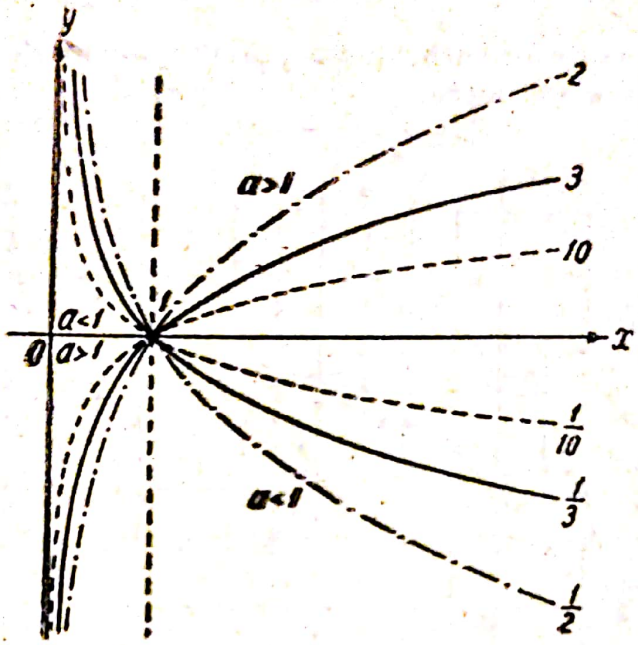

Fig. 56.

obţinem graficul funcţiei $y = \cos x$ (v. curba punctată din fig. 57), prin deplasarea graficului funcţiei $y = \sin x$ în lungul axei Ox spre stânga cu un segment de lungime $\frac{\pi}{2}$.

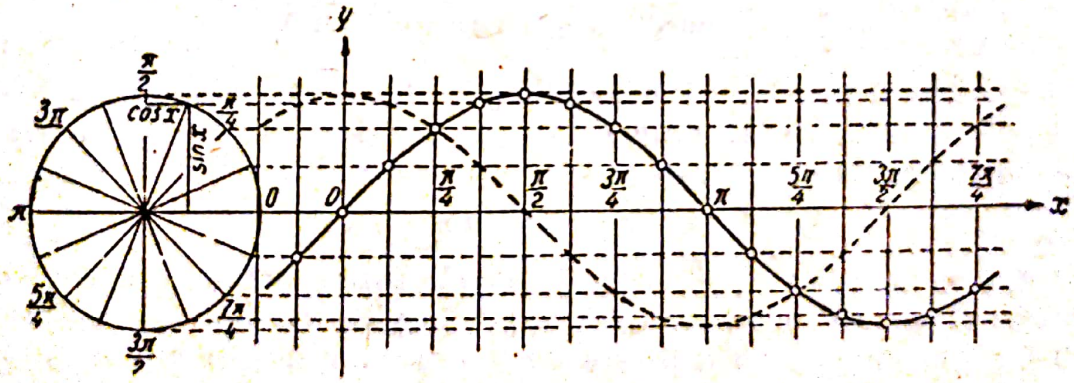

Fig. 57.

Mai departe, întrucât

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

sau

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x_1,$$

dacă $x + x_1 = \frac{\pi}{2}$, pentru obținerea graficului funcției ctg x este suficient să rotim graficul funcției tg x cu 180° în dreptul dreptei $x = \frac{\pi}{4}$ (v. ramurile punctate ale curbei în fig. 58). Propunem elevilor să se convingă singuri de acest lucru.

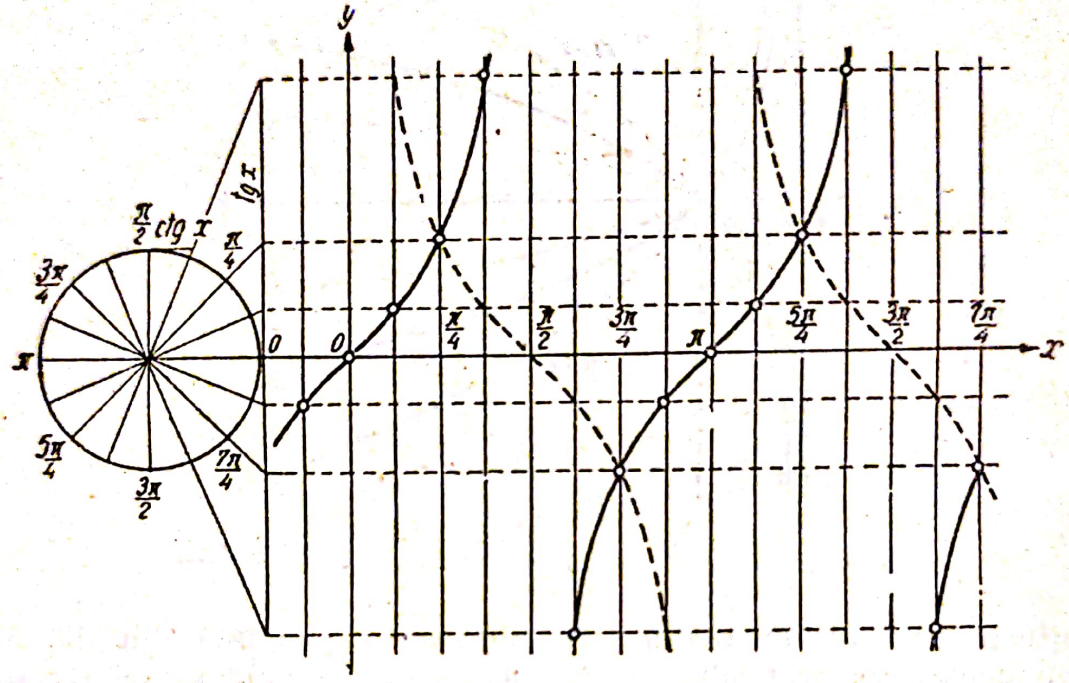

Fig. 58.

7. Funcțiile trigonometrice inverse

Dacă în dependența funcțională $y = \sin x$ considerăm pe y drept variabilă independentă, atunci funcția astfel definită este inversul funcției sin x. Ea se notează în felul următor:

$$x = \operatorname{Arcsin} y \qquad (5)$$

(se citește: „arc sinus y"). Deci, funcția (5) se definește astfel: „x este arcul, al cărui sinus este egal cu y". In virtutea faptului că sinusul (adică y) ia numai valorile cuprinse între limitele dela —1 la +1 ($-1 \leqslant y \leqslant +1$), argumentul funcției poate varia numai între limitele dela —1 la +1 (inclusiv aceste valori).

Se știe că fiecărei valori a sinusului îi corespunde nu numai un singur arc, ci un număr nesfârșit de arce. Astfel, de exemplu, dacă $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, arcele corespunzătoare vor fi: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ și toate arcele

care se obţin din aceste două prin adunarea sau scăderea unui număr întreg de circumferinţe întregi, adică prin adunarea unui termen de forma $2k\pi$, unde k este un număr întreg arbitrar (pozitiv, negativ sau zero) ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Deaceea trebue să punem :

$$\text{Arcsin}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi. \end{cases}$$

Aici întâlnim cazul când funcţia nu are o valoare unică : fiecărei valori a argumentului îi corespund, nu o singură valoare, ci mai multe valori ale funcţiei (are chiar un număr nesfârşit de valori).

Această nedeterminare în alegerea acelei valori a funcţiei, care corespunde unei valori date a argumentului, ne lipseşte de posibilitatea de a lucra cu funcţiile neuniforme ; deaceea în cursul de analiză va trebui să renunţăm la cercetarea funcţiilor multiforme. Deaceea pe viitor vom introduce o condiţie suplimentară, aceea de a preciza care anume valoare din numărul nesfârşit de valori corespunzătoare unui y dat trebue înţeleasă prin $x = \text{Arcsin}\, y$; şi vom transforma în felul aceasta funcţia noastră într'o funcţie uniformă. (Condiţii analoage vor fi stabilite şi pentru celelalte funcţii trigonometrice inverse).

Se vede imediat că graficul funcţiei $y = \sin x$ poate servi drept grafic şi pentru funcţia $x = \text{Arcsin}\, y$. In adevăr, pentru a afla semnificaţia geometrică a lui x, corespunzător unui y dat, însemnăm pe axa Oy valoarea lui y şi ducem din capătul segmentului construit o paralelă la axa Ox. Abscisa x a punctului de intersecţie a acestei drepte cu sinusoida *) va da valoarea corespunzătoare a funcţiei Arcsin y. Se vede imediat că dreapta paralelă cu axa Ox întâlneşte sinusoida într'un număr infinit de puncte, ceeace confirmă din punct de vedere geometric caracterul multiform al funcţiei Arcsin y.

In această metodă de cercetare a graficului funcţiei (5), valorile variabilei independente urmează a fi însemnate pe axa verticală, iar valorile funcţiei pe cea orizontală. Dacă dorim să reprezentăm graficul funcţiei (5) în mod obişnuit, adică astfel ca valorile argumentului să se afle pe axa orizontală, iar valorile funcţiei pe cea verticală, va trebui să îndreptăm axa veche Oy în direcţia axei Ox, iar axa Ox după vechea axă Oy. Aceasta se poate face rotind figura cu 180° în jurul bisectoarei primului unghi al axelor de coordonate, adică în jurul dreptei $y = x$.

Evident în felul acesta vom obţine o curbă simetrică cu sinusoida în raport cu bisectoarea $y = x$ (fig. 59).

*) Astfel se numeşte curba care este graficul funcţiei $y = \sin x$.

Făcând această construcţie, este natural să însemnăm noua axă a absciselor, în mod obişnuit, adică prin Ox şi, în mod analog, noua axă a ordonatelor prin Oy. Atunci este natural să ne întoarcem şi în relaţia funcţională (5) la notaţiile vechi ale argumentului şi funcţiei. Astfel, vom însemna mai departe funcţia noastră :

$$y = \text{Arcsin } x.$$

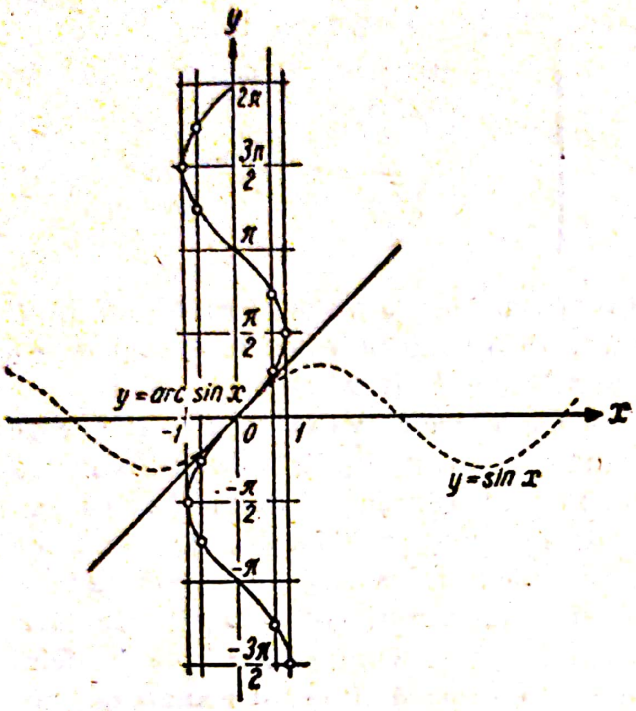

Fig. 59.

Imposibilitatea de a opera cu o funcţie multiformă ne sileşte să introducem o condiţie suplimentară (despre care s'a amintit), care arată, ce anume valoare trebue înţeleasă prin y, din numărul nesfârşit de valori corespunzătoare unui x dat. Cu alte cuvinte, trebue să introducem o condiţie care transformă funcţia într'o funcţie *uniformă.*

Din reprezentările geometrice rezultă în mod clar că în acest scop trebue să separăm din graficul funcţiei $y = \text{Arcsin } x$ o porţiune, astfel încât o dreaptă paralelă cu axa Oy să o intersecteze *numai într'un singur punct.* Vedem că această cerinţă este satisfăcută de acea porţiune a funcţiei care este desenată printr'o linie groasă. Inafară de aceasta, este clar că această porţiune nu poate fi prelungită într'o parte sau în alta fără a încălca condiţia de uniformitate pusă. Separarea porţiunii indicate din toată funcţia $y = \text{Arcsin } x$ înseamnă că, dintre toate valorile posibile ale arcului $y = \text{Arcsin } x$, alegem pe aceea care se află între limitele dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$. Aceste valori reprezintă *ramura principală* a funcţiei noastre. Spre deosebire de funcţia multiformă Arcsin x, ramura ei principală se notează cu simbolul arcsin x. Pe viitor, vorbind despre funcţia $y = \arcsin x$, *vom înţelege anume acea valoare a arcului y, care satisface relaţia :*

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2},$$

care caracterizează ramura principală a funcţiei printre celelalte ramuri ale ei.

In mod analog se defineşte funcţia $y = \text{Arccos}\, x$, inversa funcţiei $y = \cos x$. Cerinţa uniformităţii ne duce la ramura principală $y = \arccos x$, reprezentată printr'o linie groasă în graficul funcţiei $y = \text{Arccos}\, x$ (fig. 60).

Precum se vede, ramura principală a acestei funcţii satisface relaţia :

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Funcţia, inversă funcţiei $\text{tg}\, x$, se numeşte $\text{Arctg}\, x$ şi înseamnă arcul a cărui tangentă este egală cu x.

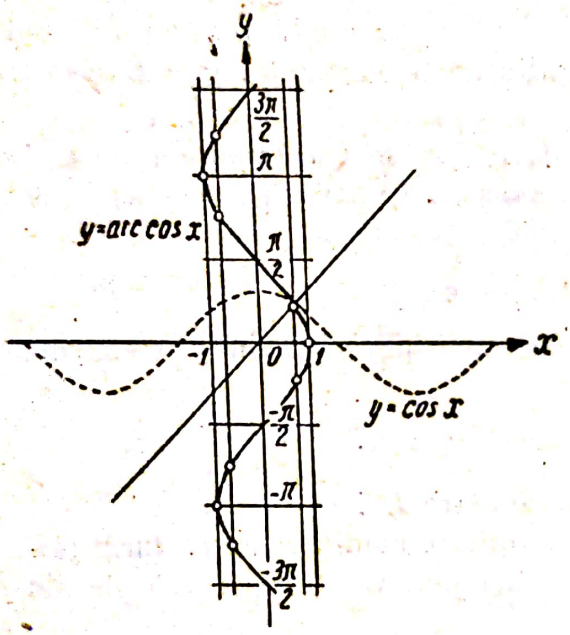

Fig. 60.

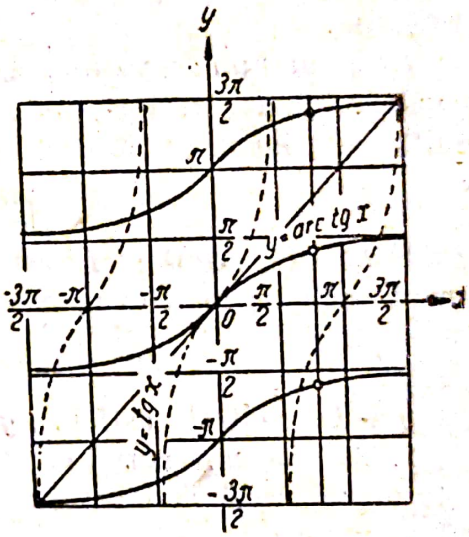

Fig. 61.

Graficul acestei funcţii, reprezentat în fig. 61, se construeşte prin rotirea cu 180° a graficului funcţiei $y = \text{tg}\, x$ în jurul bisectoarei primului unghi al axelor de coordonate. Se ia ca valoare principală a funcţiei $\text{Arctg}\, x$ acea valoare a funcţiei multiforme, care satisface inegalităţile

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\, x < +\frac{\pi}{2}.$$

In felul acesta se defineşte ca o funcţie uniformă ramura principală a arctangentei. In fig. 61 ramura principală este desenată printr'o linie groasă. Printr'un raţionament analog ajungem la funcţia $\text{Arcctg}\, x$. Valoarea ei principală se defineşte prin egalităţile

$$0 < \text{arcctg}\, x < \pi.$$

Propunem elevilor să construiască graficul funcţiei $y = \text{Arcctg}\, x$ şi să separe din acest grafic ramura principală ($\text{arcctg}\, x$) a funcţiei.

§ 39. Limita unei mărimi variabile

1. Cititorii au întâlnit noţiunea de limită la studiul geometriei elementare. Insă acolo această noţiune se aplică numai dela caz la caz. In matematica superioară ea joacă un rol extrem de important şi constituie, odată cu noţiunea de funcţie, baza analizei matematice.

Cititorii cunosc definiţia limitei unei mărimi variabile. Această definiţie sună astfel :

Numărul L se numeşte limita mărimii variabile y, dacă, pentru orice număr dat pozitiv, oricât de mic, ε, diferenţa $y-L$ va deveni şi apoi va rămâne în valoare absolută, mai mică decât ε, în timp ce y variază.

In felul acesta, pentru ca mărimea variabilă y să aibă drept limită numărul L, procesul de modificare al variabilei y trebue să fie următorul :

Oricărui număr pozitiv, ε, dat, *trebue să-i corespundă* o astfel de valoare y, încât, *începând* cu această valoare, pentru orice altă modificare a lui y, să rămână valabilă inegalitatea :

$$|y - L| < \varepsilon,$$

Faptul că numărul L este limita mărimii variabile y se exprimă în mod simbolic în felul următor :

$$\lim y = L \quad \text{sau} \quad y \to L.$$

$y \to L$ se citeşte astfel : „y tinde către L".

2. Să analizăm cazul, când variabila se modifică astfel, încât primeşte un şir nesfârşit de valori. De exemplu, variabila ia valorile din şirul următor :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{17}{16}, \quad \frac{31}{32}, \quad \frac{65}{64}, \ldots \tag{6}$$

Dacă notăm :

$$\frac{1}{2} = y_1, \quad \frac{5}{4} = y_2, \quad \frac{7}{8} = y_3, \quad \frac{17}{16} = y_4, \ldots,$$

atunci termenul general al şirului de numere (6) poate fi exprimat în felul următor :

$$y_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Dând lui n succesiv valorile 1, 2, 3, ... obţinem :

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad y_3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \ldots$$

Observând şirul (6), avem impresia că, pentru un indice n crescător, variabila y_n tinde către 1, adică este limita variabilei y_n. Să demonstrăm că în adevăr aşa este.

Să luăm un număr oarecare pozitiv, mic, de exemplu 0,1 şi să arărăm că diferenţa $y_n - 1$ devine în timpul modificării variabilei y_n, în valoare absolută mai mică decât 0,1 şi va rămâne mai departe astfel, adică :

$$|y_n - 1| < 0{,}1.$$

In adevăr, deoarece $y_n - 1 = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n} - 1 = \frac{(-1)^n}{2^n}$, avem $|y_n - 1| = \frac{1}{2^n}$. Inegalitatea $|y_n - 1| < 0{,}1$, adică $\frac{1}{2^n} < 0{,}1$ va fi satisfăcută când va fi valabilă inegalitatea $2^n > \frac{1}{0{,}1}$ sau $2^n > 10$. Intrucât $2^3 = 8$, iar $2^4 = 16$, inegalitatea $2^n > 10$ va fi satisfăcută începând cu $n = 4$; în adevăr $2^4 = 16 > 10$, $2^5 = 32 > 10$, $2^6 = 64 > 10$, etc. Prin urmare, valoarea absolută a diferenţei $y_n - 1$ în timpul variaţiei lui y_n, corespunzător creşterii lui n, va deveni (începând cu $n = 4$) şi va rămâne apoi mai mică decât 0,1.

Să luăm un alt număr pozitiv mai mic, de exemplu 0,01. Aflăm în mod analog că inegalitatea $|y_n - 1| = \frac{1}{2^n} < 0{,}01$ va fi satisfăcută pentru n, începând cu $n = 7$: $2^7 = 128 > 100$ şi deci $\frac{1}{2^7} < 0{,}01$; $2^8 = 256 > 100$ şi deci $\frac{1}{2^8} < 0{,}01$, etc.

Este clar că, în general, orice număr pozitiv ε am lua şi oricât de mic ar fi acest număr, vom afla o valoare n, începând cu care, pentru toate valorile următoare ale lui n, va fi satisfăcută inegalitatea : $|y_n - 1| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$*). Rezultă de aici, în baza definiţiei limitei, că limita variabilei y_n, pentru o creştere nelimitată a lui n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), este numărul 1.

Faptul că numărul 1 este limita funcţiei considerate se scrie astfel în mod simbolic

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right] = 1$$

(se citeşte „limita lui y_n când n tinde către plus infinit"). Notaţia $n \to +\infty$ arată, care este procesul de schimbare al variabilei.

*) In adevăr inegalitatea $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ va rămâne valabilă, dacă $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ sau $n \lg 2 > \lg \frac{1}{\varepsilon}$ adică $n > \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$.

Să analizăm acum un caz, când mărimea variabilă nu are limită. Să luăm în acest scop variabila y_n care se modifică după legea următoare :

$$y_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

Când n creşte, variabila y_n formează următorul şir de valori :

$$y_1 = -\frac{1}{2}\,;\quad y_2 = +\frac{2}{3}\,;\quad y_3 = -\frac{3}{4}\,;\quad y_4 = +\frac{4}{5}\,;\quad y_5 = -\frac{5}{6}\,;\ldots$$

Să reprezentăm acest şir prin puncte pe axa numerelor (fig. 62). Din figură se vede că termenii cu indici impari, adică termenii y_1, y_3, y_5, ..., formează un şir care tinde către —1, iar termenii cu indici pari,

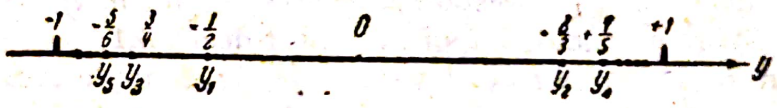

Fig. 62.

adică termenii y_2, y_4,... ; un şir care tinde către +1. Este evident că nu se poate indica un număr L astfel, încât valoarea absolută a diferenţei $y_n - L$ să devină şi să rămână apoi mai mică decât un număr oarecare dat, $\varepsilon > 0$, în decursul modificării variabilei y_n. Aceasta înseamnă că variabila y_n nu are o limită pentru $n \to +\infty$.

Fig. 63.

Dacă reprezentăm în acelaşi mod ca în primul exemplu schimbarea geometrică a variabilei y_n (fig. 63), vedem în mod intuitiv că termenii şirului format de variabila $y = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ „se îngrămădesc" în jurul numărului 1, ceeace are drept consecinţă că numărul 1 este limita acestei variabile.

Deosebit de intuitivă este şi interpretarea geometrică a inegalităţii

$$|y_n - 1| < \varepsilon. \qquad (7)$$

Insemnăm la dreapta şi la stânga punctului 1 un segment oarecare de lungime ε. Cum se vede în fig. 63, toate punctele care reprezintă valori ale variabilei y_n, afară de numărul lor *final*, cad în interiorul segmentului construit, oricât de mică ar fi lungimea ε. Fiecare punct care cade în interiorul acestui segment se află faţă de punctul 1 la o distanţă mai mică decât ε. Aceasta înseamnă că pentru toate valorile variabilei y_n, reprezentate de aceste puncte, rămâne valabilă inegalitatea (7). Este evident că punctele care nu cad în interiorul segmentului indicat sunt faţă de punctul 1 la o distanţă mai mare decât ε. Deci, valorile corespunzătoare nu satisfac egalitatea (7). Deoarece ele sunt în număr finit, rezultă de aici că inegalitatea (7) este satisfăcută, începând cu o anumită valoare n. Acesta este sensul exact al propoziţiei: în decursul modificării variabilei y_n, diferenţa $y_n - 1$ *devine* şi apoi *rămâne*, în valoare absolută, mai mică decât orice număr pozitiv ε, dat dinainte, oricât de mic ar fi acest număr.

Variabilele y_n, de care ne-am ocupat acum, pot fi considerate ca funcţii ale indicelui n; în adevăr, fiecărei valori n îi corespunde o valoare determinată a variabilei y_n. In acest caz indicele n este argumentul funcţiei şi acest argument nu ia orice valoare posibilă, ci numai valorile 1, 2, 3, 4, ...

3. Să revenim acum la precizarea noţiunii de limită în cazul când argumentul funcţiei se schimbă în mod continuu. Să luăm, de exemplu, funcţia

$$y = 3 + (x - 1)^2.$$

Este evident că, pe măsura apropierii valorii lui x de 1, diferenţa $x - 1$ se apropie oricât de mult de 0, iar valorile corespunzătoare ale funcţiei y, de numărul 3. Se poate presupune deaceea că

$$\lim_{x \to 1} y = 3.$$

Totuşi, pentru a justifica această afirmaţie, trebue să arătăm că, în timpul acelei variaţii a funcţiei y, care corespunde apropierii argumentului x de 1, diferenţa $y - 3$, luată în valoare absolută, devine şi apoi rămâne mai mică decât orice număr pozitiv ε, dat dinainte, oricât de mic ar fi acest număr.

Să luăm un număr mic pozitiv oarecare, de exemplu 0,01. Să scriem diferenţa: $y - 3 = 3 + (x - 1)^2 - 3 = (x - 1)^2$. Inegalitatea $(x - 1)^2 < 0{,}01$ este satisfăcută, dacă şi inegalitatea $|x - 1| < \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ este satisfăcută. Această inegalitate este echivalentă cu următoarea inegalitate dublă:

$$-0{,}1 < x - 1 < 0{,}1,$$

sau :

$$1 - 0{,}1 < x < 1 + 0{,}1,$$

adică :

$$0{,}9 < x < 1{,}1.$$

Astfel, inegalitatea $|y - 3| < 0{,}01$ va rămâne adevărată pentru valorile lui x, cuprinse între 0,9 şi 1,1 sau, cum vom spune şi scrie prescurtat, în *intervalul* (0,9 ; 1,1).

Să luăm alt număr, de exemplu $\frac{1}{256}$. Aflăm în mod analog : $(x-1)^2 < \frac{1}{256}$, dacă $|x-1| < \frac{1}{16}$ au $-\frac{1}{16} < x - 1 < +\frac{1}{16}$, sau $1 - \frac{1}{16} < x < 1 + \frac{1}{16}$, adică $\frac{15}{16} < x < \frac{17}{16}$. Astfel am aflat că inegalitatea $|y - 3| < \frac{1}{256}$ este satisfăcută pentru valorile x, cuprinse în intervalul $\left(\frac{15}{16}, \frac{17}{16}\right)$.

Este evident, că în acelaşi mod poate fi găsit intervalul pentru valorile lui x, unde rămâne valabilă inegalitatea $|y - 3| < \varepsilon$, în general pentru orice număr pozitiv ε, dat dinainte, oricât de mic ar fi el *). Prin urmare, în baza definiţiei unei mărimi variabile, tragem concluzia, că $\lim_{x \to 1} y = 3$.

Vedem deci că inegalitatea $|y - 3| < 0{,}01$ sau $|y - 3| < \frac{1}{256}$ sau, în general, $|y - 3| < \varepsilon$ nu rămâne adevărată în tot timpul modificării lui y, ci numai pentru valorile argumentului x *suficient de apropiate* de 1. Aceasta înseamnă, că inegalitatea $|y - 3| < \varepsilon$ este valabilă numai atunci, când x se află în intervalul corespunzător unui ε dat **), în interiorul căruia se află 1 (şi deci care cuprinde numărul 1 din ambele părţi). Iată în ce constă sensul propoziţiei : diferenţa $y - 3$ *devine* în timpul modificării variabilei y, în valoare absolută, mai mică decât ε. Şi, întrucât mai departe, inegalitatea $|y - 3| < \varepsilon$ este satisfăcută pentru *toţi* x, aflaţi în intervalul corespunzător,

---

*) Inegalitatea $|y - 3| < \varepsilon$, adică inegalitatea $|x - 1| < \sqrt{\varepsilon}$, este satisfăcută dacă este satisfăcută inegalitatea $(x-1)^2 < \varepsilon$, sau inegalitatea dublă echivalentă $-\sqrt{\varepsilon} < x - 1 < +\sqrt{\varepsilon}$, sau $1 - \sqrt{\varepsilon} < x < 1 + \sqrt{\varepsilon}$. Prin urmare, inegalitatea $|y - 3| < \varepsilon$ rămâne valabilă pentru valorile lui x, cuprinse în intervalul $(1 - \sqrt{\varepsilon}; 1 + \sqrt{\varepsilon})$.

**) Cum am văzut, pentru $\varepsilon = 0{,}01$, acest interval se determină prin limitele 0,9 şi 1,1 ; pentru $\varepsilon = \frac{1}{256}$, prin limitele $\frac{16}{16}$ şi $\frac{17}{16}$, etc.

aceasta înseamnă că diferența $y - 3$ devine și *rămâne* în valoare absolută mai mică decât ε.

4. Să analizăm acum exemplul nostru din punct de vedere geometric. Graficul funcției $y = 3 + (x-1)^2$ este o parabolă (fig. 64). Pe figură se vede clar că, pe măsură ce x se apropie de punctul 1, ordonatele curbei se apropie oricât de mult dorim de valoarea 3. Este deci clar că pentru orice număr pozitiv ε, dat dinainte, oricât de mic ar fi el, diferența $y - 3$ va deveni și va rămâne în valoare absolută mai mică decât ε, pentru valori x suficient de apropiate de 1.

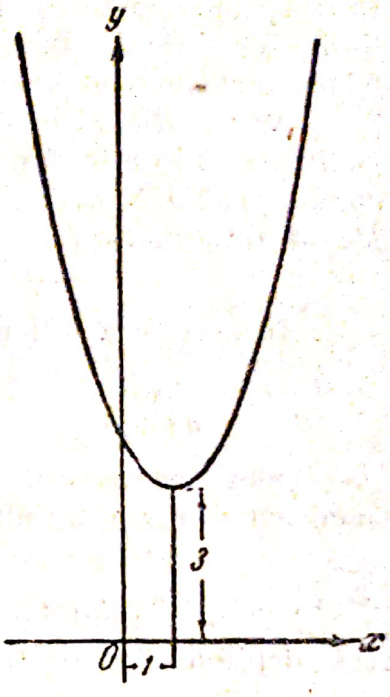

Fig. 64.

5. Din definiția limitei urmează că, pentru ca să existe o limită L a funcției $y = f(x)$, pentru $x \to c$, se cere ca valorile funcției să difere oricât de puțin dorim de numărul L, pentru valorile lui x *suficient de apropiate* de c. Este absolut indiferent ce se întâmplă cu funcția pentru $x = c$; este indiferent dacă funcția este definită pentru $x = c$ sau nu și, în caz că este definită, este indiferent dacă valoarea ei coincide cu numărul L sau este diferită de acest număr. Deci, dacă vorbim despre limita funcției pentru $x \to c$, nu are niciun sens să includem valoarea lui $x = c$ în numărul valorilor luate de x.

Mai departe (§ 68) vom vedea, de exemplu, că $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. Pe de altă parte, pentru $z = 0$, funcția $\dfrac{\sin z}{z}$ nu este deloc definită, întrucât nu este admisibil să se împartă prin zero.

Prin urmare, relevăm odată pentru totdeauna, *că în căutarea limitei către care tinde funcția* $y = f(x)$, *când* x *se apropie de* c, *valoarea* $x = c$ *este exclusă.*

6. La începutul punctului 3 al acestui paragraf, am stabilit că variabila y_n, care primește succesiv un șir de valori:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

poate fi considerată drept funcție a indicelui n. Din însăși esența problemei vedem că argumentul n al unei astfel de funcții crește, luând valorile 1, 2, 3, ... Am convenit să spunem că n tinde către plus infinit ($n \to +\infty$).

In analiză trebue adeseori să cercetăm variația unei funcții $f(x)$, al cărei argument x, luând un șir continuu de valori, crește deasemenea nelimitat. Și în acest caz vom spune că x tinde către $+\infty$ ($x \to +\infty$).

Se poate întâmpla ca pentru $x \to +\infty$ valoarea funcției $f(x)$ să se apropie oricât de un număr determinat L. Astfel, ajungem la noțiunea de limită a funcției $f(x)$ pentru $x \to +\infty$. Această definiție se formulează în felul următor :

Numărul L se numește limita funcției $f(x)$ pentru $x \to +\infty$, dacă, pentru orice număr dat dinainte $\varepsilon > 0$, oricât de mic, se poate afla un număr pozitiv N astfel, încât pentru toate valorile $x > N$ să fie satisfăcută inegalitatea :

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

In acest caz scriem :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ sau } f(x) \to L \text{ pentru } x \to +\infty.$$

Dacă argumentul x descreşte în mod nelimitat, se spune, că x tinde către minus infinit şi se scrie :

$$x \to -\infty.$$

Definiția limitei funcției $y = f(x)$ pentru $x \to -\infty$ are o analogie deplină cu definiția limitei funcției pentru :

$$x \to +\infty.$$

Numărul L se numește limita funcției pentru $x \to -\infty$, dacă, pentru orice număr dat dinainte $\varepsilon > 0$, se poate găsi un număr negativ N astfel, încât pentru toate valorile $x < N$ să rămână valabilă inegalitatea :

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

In cazul acesta se scrie :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

sau :

$$f(x) \to L \text{ pentru } x \to -\infty.$$

7. Ştim din geometria analitică că ecuația $y = l$ reprezintă o linie dreaptă, paralelă cu axa absciselor (§ 7). Fiecărui punct x de pe axa absciselor îi corespunde o ordonată y a acestei drepte, care este *mereu egală cu același număr l*. Traducând în limba analizei, putem spune, că mărimea $y = l$ este o funcție care primește o singură valoare numerică pentru orice valoare a argumentului. Pe de altă parte, mărimea $y = l$ este constantă. In felul acesta ajungem în mod natural să considerăm o mărime constantă drept o funcție deosebită, adică drept o funcție capabilă să ia numai o singură valoare numerică.

O astfel de considerare a mărimii constante duce în mod logic la necesitatea de a admite că există totdeauna o limită a unei mărimi constante şi că această limită este egală cu valoarea unică a mărimii constante.

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr inegalitatea

$$|y - l| < \varepsilon,$$

adică inegalitatea

$$|l - l| = 0 < \varepsilon$$

rămâne valabilă pentru orice număr pozitiv ε, dat dinainte. De aici, în baza definiţiei limitei, trebue să considerăm, că

$$\lim l = l.$$

In felul acesta, vom admite că *limita unei mărimi constante există totdeauna şi este egală cu însăşi mărimea constantă.*

Această convenţie relativ la limita unei mărimi constante este necesară şi din motive practice, întrucât în felul acesta se ajunge la o simplificare mai mare în formularea unui şir de teoreme asupra limitelor.

§ 40. Mărime infinit mică

1. Vom vedea mai departe că dintre mărimile variabile sunt deosebit de importante în analiză variabilele *care tind către zero.* Deaceea ele sunt despărţite într'o categorie aparte, sunt supuse unui studiu special şi poartă o denumire deosebită : „infiniţi mici".

Deci, *dacă* $\lim \alpha = 0$, *atunci* α *se numeşte o mărime infinit mică.*

Din definiţia limitei rezultă că diferenţa $\alpha - 0$, adică chiar mărimea infinit mică α, *devine în timpul variaţiei sale şi apoi rămâne, în valoare absolută, mai mică decât orice număr pozitiv, dat dinainte* ε, *oricât de mic ar fi el*

$$|\alpha| < \varepsilon.$$

Să cercetăm câteva exemple de mărimi infinit mici.

Exemplul 1. Să considerăm un pendul care, fiind scos din poziţia de echilibru, începe să oscileze (fig. 65). Vom defini poziţia pendulului prin unghiul α, pe care acesta îl formează cu o dreaptă verticală (poziţia de echilibru). Unghiul α îl vom considera pozitiv sau negativ, după cum pendulul se va afla la dreapta sau la stânga verticalei. Admiţând existenţa unei rezistenţe, vedem că, începând cu un moment oarecare, unghiul ε, în valoare absolută, devine şi apoi rămâne mai mic decât un număr oarecare pozitiv ε, oricât de mic, dat dinainte. Prin urmare, ε este o mărime infinit mică, luând în timpul variaţiei sale, când valori pozitive, când negative.

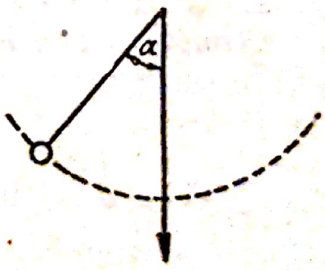

Fig. 65.

Exemplul 2. Să luăm funcţia $y = x^2$. Fig. 52 care reprezintă graficul ei arată în mod intuitiv că, atunci când $x \to 0$, şi $y = x^2 \to 0$, adică $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

aceasta înseamnă că funcţia $y = x^2$ este pentru $x \to 0$ o mărime infinit mică. Observăm că numai pentru $x \to 0$ limita funcţiei $y = x^2$ este egală cu zero. De exemplu, cum se vede în figură, $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$. Deaceea nu este permis a spune că funcţia $y = x^2$ este, în general, o mărime infinit mică

ci trebue indicate, cu această ocazie, condiţiile ei de variaţie, adică trebue adăugat: „pentru $x \to 0$".

Deci, afirmaţia că o funcţie oarecare $f(x)$ este o mărime infinit mică trebue să fie mereu însoţită de indicaţia complimentară în privinţa valorii argumentului, în apropierea căruia variaţia funcţiei dobândeşte caracterul de mărime infinit mică.

In fig. 52, 53 şi 54 se vede clar, că toate funcţiile reprezentate sunt mărimi infinit mici pentru $x \to 0$.

Fig. 56 arată, că loga x este o mărime infinit mică pentru $x \to 1$.

Exemplul 3. Graficul funcţiei $y = \frac{1}{x}$ este o hiperbolă echilateră (v. § 25); fig. 37, care reprezintă o hiperbolă echilateră, arată în mod intuitiv că ordonata y a unui punct al hiperbolei tinde către 0, atât pentru $x \to +\infty$, cât şi pentru $x \to -\infty$. In felul acesta, funcţia $y = \frac{1}{x}$ este o mărime infinit mică atât pentru $x \to +\infty$, cât şi pentru $x \to -\infty$.

2. Când am convenit să considerăm o mărime constantă drept o funcţie, capabilă să ia o singură valoare numerică pentru orice valoare a argumentului, am ajuns la necesitatea să considerăm că există mereu o limită a unei mărimi constante, care este egală cu însăşi mărimea constantă. In felul acesta avem pentru oricare c:

$$\lim_{x \to c} 0 = 0.$$

Rezultă de aci că funcţia $y = 0$ trebue considerată ca făcând parte din mărimile infinit mari.

3. Trebue să observăm că expresia „mărime infinit mică" este extrem de nepotrivită şi duce adeseori la confuzii: de această expresie se leagă noţiunea de mărime, pe când în realitate ea ar trebui să servească numai pentru desemnarea *felului cum se modifică variabila.*

Motivul menţinerii unei astfel de terminologii nepotrivite în ştiinţă stă în tradiţia formată pe care istorică, care îşi are izvoarele în acele timpuri, când noţiunea de mărime infinit mică avea cu totul alt sens decât acum.

§ 41. Mărime infinit mare. Legătura între mărimea infinit mică şi cea infinit mare

1. Să cercetăm funcţia $y = \frac{1}{x^2}$. Când $x \to 0$, funcţia x^2 ia valori din ce în ce mai mici. Deaceea valorile funcţiei $\frac{1}{x^2}$ cresc nelimitat pentru $x \to 0$. Să luăm un număr oarecare mare, pozitiv, de exemplu numărul 10 000. Se vede că pentru valori x, suficient de apropiate de 0,

va fi satisfăcută inegalitatea $\frac{1}{x^2} > 10\,000$. In adevăr, pentru ca această inegalitate să rămână valabilă, trebue să fie satisfăcută inegalitatea $x^2 < \frac{1}{10\,000}$ sau $|x| < \frac{1}{100}$, adică $-\frac{1}{100} < x < \frac{1}{100}$. Deci, pentru toate valorile x, cuprinse în interiorul intervalului $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$, are loc inegalitatea $\frac{1}{x^2} > 10\,000$. Se vede imediat, că pentru orice alt număr pozitiv K, oricât de mare, va avea loc inegalitatea $\frac{1}{x^2} > K$, pentru valori x suficient de apropiate de 0.

O mărime variabilă, care variază în aşa fel, se numeşte mărime *infinit mare.*

Noţiunea generală a mărimii infinit mari se defineşte în felul următor.

Se numeşte mărime infinit mare o mărime variabilă y, care variază în felul următor : orice număr K pozitiv, oricât de mare am lua variabila y, în decursul variaţiei sale, va deveni în valoare absolută şi va rămâne mai mare decât K.

Intrucât $\left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}$ rezultă în baza definiţiei date, că funcţia $y = -\frac{1}{x^2}$ este o mărime infinit mare pentru $x \to 0$.

Pentru a obţine o imagine intuitivă despre felul variaţiei mărimilor infinit mari $y = \frac{1}{x^2}$ şi $y = -\frac{1}{x^2}$, să construim graficul acestor funcţii.

Ordonatele y ale curbei $y = \frac{1}{x^2}$, rămânând pozitive, atât pentru $x < 0$, cât şi pentru $x > 0$, se reprezintă pentru $x \to 0$ prin segmente care cresc nelimitat în lungime. Deaceea, graficul acestei funcţii va fi o curbă compusă din două ramuri separate care se ridică în mod nelimitat şi se apropie din ce în ce mai mult de axa Oy (fig. 66).

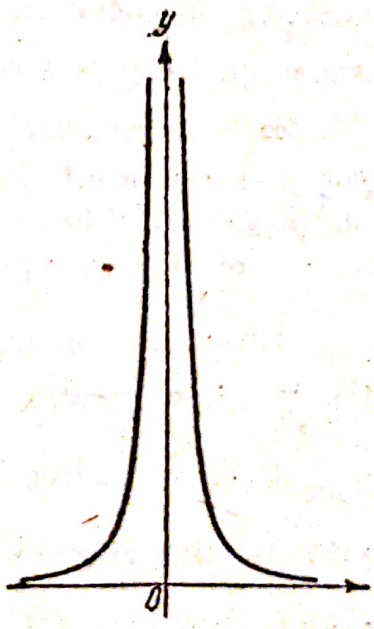

Fig. 66.

Pentru construirea graficului funcţiei $= -\frac{1}{x^2}$, este suficient, evident, să rotim graficul funcţiei $y = \frac{1}{x^2}$ cu 180° în jurul axei Ox.

2. Funcţia $y = f(x)$ poate fi o mărime infinit mare pentru $x \to +\infty$ sau $x \to -\infty$. Ca exemplu al unei astfel de mărimi infinit

mari, poate servi funcţia $y = x^3$ pentru $x \to +\infty$. In adevăr, inegalitatea $x^3 > K$, pentru un K oricât de mare, va fi satisfăcută pentru toate valorile $x > \sqrt[3]{K}$.

Şi pentru $x \to -\infty$ această funcţie este o mărime infinit mare, întrucât inegalitatea $|x^3| > K$ va fi satisfăcută pentru toate valorile $x < -\sqrt[3]{K}$.

3. Până în prezent am întâlnit mărimi infinit mari care păstrau în decursul variaţiei lor, fie numai valori pozitive, fie numai valori negative. Totuşi, există mărimi infinit mari care iau valori cu semne diferite. Nu este, de exemplu, greu să ne convingem că acestui tip de mărimi infinit mari îi aparţine funcţia $y = (-1)^n \cdot n$, argumentul n fiind un număr întreg, pozitiv ($n = 1, 2, 3, 4....$).

4. O mărime infinit mare y nu poate tinde către o limită în cursul variaţiei sale. In adevăr orice număr L am lua, diferenţa $y - L$ va creşte în valoarea absolută în mod nelimitat, odată cu creşterea nelimitată a mărimii absolute y. Deaceea inegalitatea $|y - L| < \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv oarecare, nu poate fi satisfăcută. Totuşi pentru exprimare mai comodă şi mai scurtă, se foloseşte în analiză următoarea terminologie convenţională: dacă o mărime infinit mare y ia numai valori pozitive, începând cu o valoare anumită, atunci se spune că are limita plus infinit şi se scrie: $\lim y = +\infty$. De exemplu, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Dacă o mărime infinit mare y rămâne tot timpul negativă, începând cu o anumită valoare, se spune că ea are limita minus infinit şi se scrie: $\lim y = -\infty$. De exemplu $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$. Insfârşit, dacă o mărime infinit mare ia, în timpul variaţiei sale, valori cu semne diferite şi nu rămâne la urmă numai pozitivă sau numai negativă, atunci se spune că are limita infinită şi se scrie: $\lim y = \infty$. De exemplu $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$.

Ca exemplu de mărime infinit mare poate servi deasemenea funcţia $y = \operatorname{tg} x$ pentru $x \to \frac{\pi}{2}$.

Dacă x se apropie de $\frac{\pi}{2}$, din partea primului cadran, adică rămâne tot timpul mai mic decât $\frac{\pi}{2}$, atunci valorile $\operatorname{tg} x$ cresc nelimitat, fiind pozitive. Dacă x se apropie de $\frac{\pi}{2}$ din partea cadranului al doilea, adică rămâne tot timpul mai mare decât $\frac{\pi}{2}$, atunci valorile $\operatorname{tg} x$, cresc când nelimitat în valoare absolută, rămân negative. In fine, dacă x,

apropiindu-se de $\frac{\pi}{2}$ ia atât valori mai mari, cât şi valori mai mici decât $\frac{\pi}{2}$, atunci tg x creşte nelimitat în valoare absolută şi va fi, când pozitivă, când negativă.

In felul acesta, dacă x tinde către $\frac{\pi}{2}$ într'un mod oarecare, vom avea :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty.$$

Este tot atât de evident, că

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Folosind terminologia introdusă, trebue să ne dăm seama că limitele $+\infty$, $-\infty$ şi ∞ sunt numai simboluri, iar nu numere. Propoziţia „limita lui y este $+\infty$", scrisă sub forma $\lim y = +\infty$ exprimă numai pe scurt faptul că y este o mărime infinit mare care, în timpul variaţiei, primeşte numai valori pozitive (sau rămâne mereu o mărime pozitivă). O limită, în sensul propriu zis al acestui cuvânt, este totdeauna un număr. Este evident că nu se poate efectua nicio operaţiune cu limite simbolice.

5. Termenul „mărime infinit mare" este tot atât de nepotrivit ca termenul „mărime infinit mică", şi despre termenul „mărime infinit mare" se pot repeta cele spuse despre termenul „mărime infinit mică" în § 40, p. 3.

6. Intre mărimile infinit mici şi cele infinit mari există o legătură strânsă, stabilită prin teoremele următoare :

T e o r e m a 1. *Dacă y este o mărime infinit mică, atunci mărimea inversă, adică $\frac{1}{y}$, este o mărime infinit mare.*

In adevăr, dacă numitorul fracţiei $\frac{1}{y}$ se apropie în mod nelimitat de zero, luând valori tot mai mici în valoare absolută *), atunci fracţia $\frac{1}{y}$ va creşte în mod nelimitat în valoare absolută. Astfel că orice număr pozitiv N, oricât de mare, am da dinainte, începând cu o anumită valoare x, va deveni şi v rămâne valabilă inegalitatea $\left|\frac{1}{y}\right| > N$.

*) Se presupune că y în timpul variaţiei sale până la urmă nu se anulează niciodată.

Că în adevăr va fi astfel, ne putem uşor convinge în felul următor. Avem în mod evident egalitatea: $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$. Prin urmare, inegalitatea $\left|\frac{1}{y}\right| > N$ este echivalentă cu inegalitatea

$$\frac{1}{|y|} > N,$$

care este satisfăcută cu condiţia $|y| < \frac{1}{N}$. Insă exactitatea ultimei inegalităţi este evidentă, întrucât y este prin ipoteză o mărime infinit mică. Prin urmare, este adevărată şi inegalitatea iniţială $\left|\frac{1}{y}\right| > N$.

Din cursul de trigonometrie, elevii ştiu că funcţia $y = \operatorname{ctg} x$ este o mărime infinit mică pentru $x \to \frac{\pi}{2}$, adică $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x = 0$. In virtutea teoremei demonstrate, funcţia $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ adică $y = \operatorname{tg} x$ este o mărime infinit mare pentru $x \to \frac{\pi}{2}$.

T e o r e m a 2. *Dacă y este o mărime infinit mare, atunci $\frac{1}{y}$ este o mărime infinit mică.*

In adevăr, dacă însemnăm cu ε un număr pozitiv, oricât de mic, atunci inegalitatea

$$\left|\frac{1}{y}\right| < \varepsilon \text{ sau } \frac{1}{|y|} < \varepsilon$$

va fi adevărată, începând cu valoarea x, care satisface inegalitatea $|y| > \frac{1}{\varepsilon}$. Şi întrucât y este o mărime infinit mare, este evident că există o valoare y, începând cu care va fi satisfăcută ultima inegalitate.

§ 42. Mărime mărginită

O mărime variabilă y se numeşte mărginită, dacă în timpul variaţiei sale ea rămâne, în valoare absolută, mai mică decât un anumit număr M:

$$|y| < M.$$

Astfel, funcţia $\sin x$ este o mărime mărginită, fiindcă, luând pentru M orice număr mai mare ca 1, de exemplu 2, vom avea pentru orice x:

$$|\sin x| < 2.$$

§ 43. Teoreme fundamentale asupra mărimilor infinit mici

T e o r e m a 1. *Dacă α şi β sunt mărimi infinit mici, atunci $\alpha \pm \beta = \sigma$ este deasemenea o mărime infinit mică.*

Demonstraţie. Fie ε un număr pozitiv oricât de mic. Trebue să demonstrăm că în timpul variaţiei sale σ va deveni şi apoi va rămâne, în valoare absolută, mai mic decât ε:

$$|\sigma| < \varepsilon.$$

Modul cum variabilele α şi β se apropie de zero poate diferi. Insă, atât α cât şi β sunt mărimi infinit mici, deci fiecare din ele va deveni în timpul variaţiei sale şi va rămâne apoi, în valoare absolută, mai mică decât orice număr pozitiv dat dinainte şi prin urmare mai mică decât $\frac{\varepsilon}{2}$.

Vom considera acele valori α şi β pentru care sunt simultan valabile inegalităţile:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Intrucât $|\alpha \pm \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ (v. § 32, p. 1), vom avea:

$$|\sigma| = |\alpha \pm \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică $|\sigma| < \varepsilon$, ceeace era de demonstrat.

Consecinţă. Teorema şi demonstraţia ei se pot extinde fără dificultate la cazul unui număr oarecare de mărimi infinit mici. Astfel ajungem la următoarea propoziţie:

Suma algebică a unui număr oarecare constant de mărimi infinit mici este o mărime infinit mică.

Observaţie. In teorema demonstrată este esenţială cerinţa, ca numărul termenilor sumei algebrice să fie constant. Dacă, dimpotrivă, odată cu apropierea de zero a fiecărui termen, numărul lor va creşte nelimitat, teorema poate să nu mai fie adevărată.

Să luăm, de exemplu, un segment de dreaptă de lungime egală cu unitatea şi să-l împărţim în 2, 3, 4,..., 10,..., 100,..., în general în n părţi egale. Fiecare parte va fi egală cu $\frac{1}{n}$, iar suma tuturor părţilor egale, va fi egală cu unitatea. Să mărim acum nelimitat numărul diviziunilor n. Atunci fiecare parte, egală cu $\frac{1}{n}$ va fi o mărime infinit mică.

Insă suma tuturor părţilor rămâne pentru orice valoare n totdeauna egală cu unitatea şi nu este deloc infinit mică. Aceasta se întâmplă din cauză că aici nu avem un număr constant de termeni, ci o sumă cu un număr de termeni care creşte nelimitat.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2. *Dacă α este o mărime infinit mică iar y o mărime mărginită, atunci produsul $y\alpha = \sigma$ este o mărime infinit mică.*

Demonstraţie. Trebue să demonstrăm că σ este o mărime infinit mică, cu alte cuvinte că începând cu o anumită valoare σ şi în tot timpul variaţiei ei ulterioare va fi valabilă inegalitatea

$$|\sigma| < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv dat dinainte, oricât de mic.

Intrucât y este o mărime mărginită, se poate găsi un număr pozitiv N, astfel ca $|y| < N$. Mărimea α este infinit mică ; deaceea în decursul variaţiei sale va deveni şi apoi va rămâne în valoare absolută, mai mică decât orice număr pozitiv dat dinainte şi prin urmare, în particular, mai mică decât numărul $\frac{\varepsilon}{N}$:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

In felul acesta pentru valorile α, pentru care este satisfăcută această inegalitate, vom avea :

$$|\sigma| = |y\alpha| = |y| \cdot |\alpha| < N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Consecinţa 1. Evident că o mărime constantă este mărginită. Deaceea teorema demonstrată rămâne valabilă dacă factorul y va fi o mărime constantă.

Consecinţa 2. O mărime infinit mică este deasemenea mărginită. Deaceea teorema rămâne valabilă şi pentru cazul când ambii factori sunt mărimi infinit mici.

Consecinţa 3. Această teoremă se extinde uşor pentru cazul unui număr oarecare constant de factori, printre care cel puţin unul trebue să fie o mărime infinit mică, iar ceilalţi pot fi, fie variabile mărginite, fie constante, fie deasemenea infiniţi mici.

2. Raportul a două mărimi infinit mici poate fi, după modul de variaţie al fiecăruia dintre ele, fie o mărime infinit mică, fie o variabilă mărginită, fie o constantă, fie un infinit mare.

In adevăr, fie α o mărime infinit mică şi y o mărime mărginită. Atunci, în virtutea teoremei demonstrate şi a consecinţelor ei, mărimile α^2, $y\alpha$, 2α sunt deasemenea infinit mici.

Obţinem acum :

1) $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, — mărime infinit mică.

2) $\frac{y\alpha}{\alpha} = y$, mărime mărginită.

3) $\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$, mărime constantă.

4) $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$, mărime infinit mare (în virtutea teoremei 1, § 41).

3. Numărul 0 l-am trecut în categoria mărimilor infinit mici (v. § 40, p. 2). Dacă nu ne-am declara de acord cu această convenţie, am fi nevoiţi să introducem rectificări în teoremele demonstrate, ceeace ar duce la o formulare mai complicată. In adevăr fie α o mărime infinit mică. Atunci $-\alpha = (-1)\alpha$ este deasemenea un infinit mic. Insă $\alpha + (-\alpha) = 0$. Deaceea în teorema despre suma algebrică a infiniţilor mici, ar fi trebuit să facem rezerva: „dacă această sumă nu este egală cu zero". Rezerve analoage ar fi trebuit să introducem deasemenea în consecinţele 1 şi 3 ale teoremei 2.

§ 44. Legătura între variabilă, limita ei şi mărimea infinit mică

Fie y o variabilă care are limita L. Aceasta înseamnă, că diferenţa $y - L$ va deveni în timpul variaţiei lui y şi apoi va rămâne în valoare absolută mai mică decât orice număr pozitiv ε dat dinainte, oricât de mic ar fi acesta:

$$|y - L| < \varepsilon.$$

Reamintindu-ne definiţia mărimii infinit mici (§ 40), vedem că diferenţa $y - L$ este o mărime infinit mică.

Deci, diferenţa:

$$y - L = \alpha$$

între mărimea variabilă y şi limita ei L este o mărime infinit mică (α).

Invers, *dacă diferenţa între variabila y şi numărul L este o mărime infinit mică* (α), *atunci L este limita variabilei y.*

In adevăr, aceasta înseamnă că diferenţa $y - L$ va deveni în timpul variaţiei lui y şi apoi va rămâne mai mică decât orice număr pozitiv dat dinainte. Aceasta este însă chiar definiţia limitei variabilei y. Deci, $\lim y = L$.

Din cele demonstrate rezultă că, *atunci când variabila y poate fi reprezentată sub forma unei sume a numărului L şi a unei mărimi infinit mici* α, adică sub forma sumei:

$$y = L + \alpha,$$

putem afirma că numărul L este limita mărimii variabile y.

Acest rezultat se foloseşte adesecri pentru stabilirea existenţe limitei unei mărimi variabile.

§ 45. Teoremele fundamentale despre limite

Sarcina noastră este de a învăţa să aflăm limitele mărimilor variabile. Teoremele de mai sus înlesnesc în unele cazuri aflarea limitelor.

T e o r e m a 1. *Dacă variabilele y şi z au respectiv limitele A şi B, atunci suma algebrică a variabilelor va avea deasemenea o limită şi anume* :

$$\lim (y \pm z) = A \pm B.$$

Demonstraţia. Din condiţiile teoremei rezultă că

$$y = A + \alpha \quad \text{şi} \quad z = B + \beta, \tag{8}$$

unde α şi β sunt mărimi infinit mici (v. § 44). Atunci :

$$y \pm z = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta).$$

Termenul $(\alpha \pm \beta)$ este conform teoremei 1, § 43, o mărime infinit mică. Termenul $A \pm B$ este un număr. In felul acesta, mărimea variabilă $y \pm z$ reprezintă suma numărului $A \pm B$ şi a mărimii infinit mici $\alpha \pm \beta$. De aci, urmează, în baza rezultatelor stabilite în § 44, că

$$\lim (y \pm z) = A \pm B.$$

Astfel am demonstrat în acelaşi timp existenţa limitei unei sume algebrice de variabile şi faptul că această limită este egală cu suma limitelor termenilor.

Consecinţă. Această teoremă şi demonstraţia ei este valabilă pentru cazul oricărui număr finit de termeni.

T e o r e m a 2. *Dacă variabilele y şi z au respectiv limitele A şi B, atunci şi produsul variabilelor are o limită şi anume* :

$$\lim (yz) = AB.$$

Demonstraţie. Plecând dela aceleaşi egalităţi (8) şi înmulţindu-le termen cu termen, obţinem :

$$yz = AB + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta).$$

Termenul din paranteze este o mărime infinit mică, în virtutea teoremelor 1 şi 2 despre infiniţii mici (§ 43). Produsul AB este un număr. Tragem de aici concluzia, că :

$$\lim (yz) = AB.$$

Consecință. Această teoremă și demonstrația ei este valabilă pentru cazul unui număr oarecare, finit, de factori.

T e o r e m a 3. *Dacă variabilele y și z au respectiv limitele A și B și* $B \neq 0$, *atunci și raportul variabilelor are o limită, și anume :*

$$\lim \frac{y}{z} = \frac{A}{B}.$$

Demonstrația acestei teoreme este destul de complicată. Deaceea nu o dăm în textul de bază, ci o aducem numai ca o complectare cu literă mică.

Demonstrația teoremei 3. Plecând dela egalitățile (8), obținem :

$$\frac{y}{z} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B^2 + \beta B},$$

sau

$$\frac{y}{z} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B^2 + \beta B}(B\alpha - A\beta). \qquad (9)$$

Intrucât β este o mărime infinit mică, ea va deveni în cursul variației ei și apoi va rămâne mai mică decât $\frac{|B|}{2}$ (amintim că $B \neq 0$). Atunci vom avea :

$$|\beta B| < \frac{|B|}{2}|B| = \frac{B^2}{2} \text{ și } |B^2 + \beta B| > B^2 - \frac{B^2}{2}, \text{ adică}$$

$|B^2 + \beta B| > \frac{B^2}{2}$. De aici rezultă, că $\left|\frac{1}{B^2 + \beta B}\right| < \frac{2}{B^2}$, adică $\frac{1}{B^2 + \beta B}$ este o mărime mărginită. In virtutea teoremelor din § 43 și a consecințelor lor, diferența $B\alpha - A\beta$ este o mărime infinit mică. Deaceea tragem, pe baza teoremei 2, § 43, concluzia că produsul $\frac{1}{B^2 + \beta B}(B\alpha - A\beta)$ este deasemenea o mărime infinit mică. In baza relației (9), aceasta înseamnă că diferența $\frac{y}{z} - \frac{A}{B}$ este o mărime infinit mică. Prin urmare,

$$\lim \frac{y}{z} = \frac{A}{B}.$$

In încheiere mai citâm o teoremă, a cărei valabilitate este evidentă :

T e o r e m a 4. *Dacă variabilele z, y, u satisfac, în cursul variației lor inegalitățile* $z < y < u$ *sau* $z > y > u$ *și variabilele z și u au limita comună L, atunci y tinde către aceeași limită L.*

§ 46. Creşterile argumentului şi funcţiei

Să presupunem că argumentul x al funcţiei $f(x)$ ia valoarea x_1 şi apoi valoarea x_2. Diferenţa $x_2 - x_1$ se numeşte *creşterea argumentului* şi se notează deobicei cu simbolul Δx_1; astfel,

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1.$$

Litera grecească Δ (delta) *nu este factor*, ci indică numai operaţia scăderii valorii vechi $x = x_1$ din valoarea nouă $x = x_2$. In felul acesta Δ nu se poate despărţi de x_1, tot astfel cum nu se poate despărţi sin de x în expresia $\sin x$ sau $\log_a$ de x în expresia $\log_a x$.

Diferenţa între valorile $f(x_2) = y_2$ şi $f(x_1) = y_1$ ale funcţiei $f(x) = y$ corespunzătoare valorilor x_2 şi x_1 ale argumentului, adică diferenţa $f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$, se numeşte *creşterea funcţiei* şi se înseamnă cu simbolul Δy_1; astfel:

$$\Delta y_1 = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1.$$

Exemplu. Se dă funcţia $y = x^2 - 3x$. Fie $x_1 = 2$ şi $x_2 = 2{,}3$. Atunci avem:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 2{,}3 - 2 = 0{,}3;$$
$$y_1 = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2;$$
$$y_2 = (2{,}3)^2 - 3 \cdot 2{,}3 = 5{,}29 - 6{,}9 = -1{,}61;$$

prin urmare,

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = -1{,}61 - (-2) = 0{,}39.$$

Dacă $x_2 > x_1$, creşterea $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ are o valoare pozitivă; valorii $x_2 < x_1$ îi corespunde o creştere negativă $\Delta x_1 = x_2 - x_1$.

Evident, şi creşterea funcţiei poate fi atât o mărime pozitivă, cât şi una negativă.

§ 47. Continuitatea funcţiei

1. Noţiunea de continuitate a funcţiei joacă un rol de prim ordin în analiza matematică. In particular, această noţiune este foarte importantă şi pentru scopul nostru imediat, adică aflarea limitelor funcţiilor.

Să privim figura 67 şi 68. Să presupunem că fig. 67 este reprezentarea funcţiei $y = f(x)$, iar fig. 68, a funcţiei $y = \varphi(x)$. In timp ce prima funcţie este reprezentată printr'o curbă lină şi continuă, care nu este întreruptă nicăeri, graficul funcţiei $y = \varphi(x)$ are o întrerupere pentru $x = x_0$. Este greu de crezut că sensul următoarei propoziţii ar putea să fie neclar cuiva: „figura 67 reprezintă o funcţie, continuă pentru toate valorile x, iar figura 68 reprezintă o funcţie, care are o discontinuitate pentru $x = x_0$ (sau în *punctul* $x = x_0$ *)".

*) Denumirea de „punct", dată unei valori particulare a argumentului, leagă în mod intuitiv valoarea argumentului de reprezentarea lui pe axa numerelor.

Vedem că discontinuitatea funcției $y = \varphi(x)$ pentru $x = x_0$ provine din faptul că la trecerea prin valoarea $x = x_0$, funcția variază printr'un salt. Trecerea dela valoarea x_0 la altă valoare x poate fi imaginată în sensul, că s'a dat valorii x_0 creșterea $\Delta x_0 = x - x_0$. Atunci noua valoare a funcției $y = \varphi(x) = \varphi(x_0 + \Delta x_0)$ se va deosebi de cea veche $y_0 = \varphi(x_0)$ prin creșterea

$$\Delta y_0 = \varphi(x_0 + \Delta x_0) - \varphi(x_0).$$

Vedem (fig. 68) că, atunci când Δx_0, rămânând pozitiv, descreşte şi se apropie de 0, creşterea Δy_0 a funcției se apropie de o valoare,

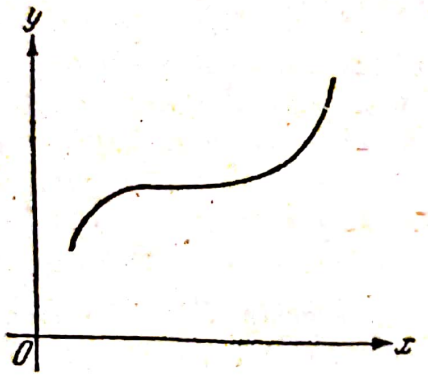

Fig. 67.

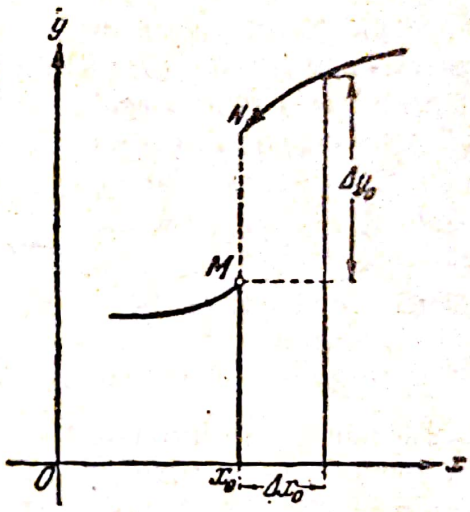

Fig. 68.

egală cu lungimea segmentului MN. Dacă creşterea Δy_0 ar tinde către zero, atunci este limpede că funcția nu ar fi discontinuă pentru $x = x_0$.

Ajungem la următoarea definiție a continuității unei funcții într'un punct (pentru o valoare dată a argumentului).

Funcția $y = f(x)$ *se numeşte continuă în punctul* x_0, *dacă limita creşterii* Δy_0 *a funcției pentru creşterea* Δx_0 *a argumentului, care tinde către* 0, *este egală cu zero* :

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \Delta y_0 = \lim_{\Delta x_0 \to 0} [f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)] = 0.$$

Cu alte cuvinte, funcția $y = f(x)$ se numeşte continuă în punctul x_0, dacă creşterea ei Δy_0 este o mărime infinit mică pentru $\Delta x_0 \to 0$.

2. Deci, dacă creşterea Δy_0 a funcției este pentru $\Delta x_0 \to 0$ o mărime infinit mică, atunci funcția $y = f(x)$ este continuă în punctul x_0, conform definiției. Intrucât :

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0),$$

urmează că, pentru $\Delta x_0 \to 0$, diferența între mărimea variabilă $f(x_0 + \Delta x_0)$ și numărul $f(x_0)$ este o mărime infinit mică. De aici tragem concluzia, conform definiției limitei,

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0), \tag{10}$$

Insă $x_0 + \Delta x_0 = x$, și, când $\Delta x_0 \to 0$, atunci $x \to x_0$. Prin urmare, egalitatea (10) poate fi transcrisă astfel :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

adică, *dacă funcția* $y = f(x)$ *este continuă în punctul* x_0, *atunci limita ei pentru* $x \to x_0$ *este egală cu valoarea funcției pentru* $x = x_0$.

Invers, fie cunoscut, că :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{11}$$

Prin urmare, diferența

$$f(x) - f(x_0)$$

este o mărime infinit mică pentru $x \to x_0$. Insă această diferență este creșterea funcției Δy_0, corespunzătoare creșterii $\Delta x_0 = x - x_0$ a argumentului. Când $x \to x_0$, atunci $\Delta x_0 \to 0$. Deci, dacă are loc egalitatea (11), atunci $\lim_{\Delta x_0 \to 0} \Delta y_0 = 0$, adică funcția $y = f(x)$ este continuă în punctul x_0.

Din propozițiile demonstrate urmează că definiția dată mai sus pentru continuitatea unei funcții într'un punct poate fi înlocuită prin definiția următoare :

Funcția $y = f(x)$ *se numește continuă în punctul* x_0 *dacă* :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{11}$$

3. Printre funcțiile pe care le-am întâlnit până acum, există funcții continue și discontinue. De exemplu, funcția $y = x^2$ este continuă în orice punct $x = c$. In adevăr, pentru $x = c$ avem : $y = x^2$. Dând valorii $x = c$ o creștere Δx, aflăm :

$$\Delta y = (c + \Delta x)^2 - c^2 = 2c\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Când $\Delta x \to 0$, atunci $2c\Delta x \to 0$ și $(\Delta x)^2 \to 0$. Prin urmare, pentru $\Delta x \to 0$ creșterea Δy este o mărime infinit mică. Și aceasta înseamnă că în punctul $x = c$ funcția $y = x^2$ este continuă.

Exemple de funcţii discontinue sunt funcţiile $y = \frac{1}{x}$ şi $y = \frac{1}{x^2}$. In adevăr, pentru $x \to 0$ aceste funcţii sunt mărimi infinit mari şi deaceea nu au limite pentru $x \to 0$ (v. § 41, p. 4). Astfel, condiţia de continuitate (11) este încălcată şi, deci, în punctul $x = 0$ aceste funcţii au discontinuităţi. Graficele acestor funcţii sunt arătate în fig. 37 şi 66. Vedem că curbele care reprezintă aceste funcţii sunt întrerupte în punctul $x = 0$.

4. Mai înainte (§ 39, p. 3), vorbind despre mulţimea tuturor valorilor argumentului x al funcţiei $f(x)$, care sunt cuprinse între două numere, de exemplu, între numerele a şi b ($a < b$), am convenit să numim *interval* mulţimea acestor puncte şi să-l notăm cu simbolul $[a, b]$. Mulţimea valorilor x, care satisfac relaţia $a \leqslant x \leqslant b$, se numeşte segment şi se notează cu simbolul $[a, b]$. In felul acesta, segmentul este format din intervalul (a, b), la care se adaugă extremităţile sale a şi b. Dacă mulţimea valorilor argumentului x este formată din toate numerele, atunci convenim să spunem şi în acest caz că aceste valori formează un interval. Acest interval se notează cu simbolul $(-\infty, +\infty)$.

Segmentul se reprezintă printr'un segment geometric obişnuit al axei absciselor.

Pentru a reprezenta un interval trebue evident să construim deasemenea un segment pe axa Ox, însă nu trebue să uităm cu acest prilej că se exclud din cercetare extremităţile segmentului.

Reprezentarea intervalului $(-\infty, +\infty)$ este toată axa absciselor.

Dacă o funcţie este continuă în fiecare punct al segmentului $[a, b]$ [*al intervalului* (a, b)], *se spune că ea este continuă pe segmentul* $[a, b]$ [*în intervalul* (a, b)].

Astfel, funcţia $y = x^2$, este continuă în intervalul $(-\infty, +\infty)$. Funcţiile $y = \frac{1}{x}$ şi $y = \frac{1}{x^2}$ sunt continue pe orice segment care nu conţine punctul $x = 0$.

Funcţia tg x este continuă pentru toate valorile x, afară de $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). In punctele $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nu este satisfăcută condiţia de continuitate întrucât tg $x \to \infty$, când $x \to \frac{\pi}{2} + k\pi$. Din acelaşi motiv funcţia ctg x are discontinuităţi în punctele $x = k\pi$ (unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); pentru toate celelalte valori x funcţia ctg x este continuă.

5. Am convenit să considerăm o mărime constantă drept funcţie capabilă de a primi numai o singură valoare pentru orice x.

Scanned with OKEN Scanner

Afară de aceasta am convenit să acceptăm că există o limită a unei constante, egală cu însăşi constanta pentru orice x, când x tinde către un număr oarecare. Prin urmare, dacă funcţia $f(x) = a$, a fiind un număr, atunci :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} a = a = f(c).$$

Am obţinut o relaţie care defineşte continuitatea funcţiei în punctul c. In felul acesta reiese din relaţiile noastre că o mărime constantă trebue considerată ca o funcţie continuă în orice punct.

6. In cursurile complecte de analiză matematică se cercetează în mod amănunţit problema continuităţii funcţiilor care intervin în analiză. Aici vom indica numai pe scurt că toate funcţiile pe care le vom întâlni mai departe sunt continue peste tot, cu excepţia unor funcţii ca $\frac{m}{x}$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ care au discontinuităţi în punctele izolate, ceeace am stabilit la pct. 4.

§ 48. Câteva procedee pentru aflarea limitelor

1. Aflarea limitelor funcţiilor continue

Continuitatea funcţiei $f(x)$ în punctul c este definită prin relaţia :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Urmează de aici că pentru aflarea limitei pentru $x \to c$ a une funcţii continue în punctul c, este suficient să calculăm valoarea ei pentru $x = c$: numărul obţinut este limita căutată a funcţiei.

Astfel, aflăm de exemplu :

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3;$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 7} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{(a - x)^2 - 2ax^2}{a(a + x)} = \frac{a^2}{a^2} = 1;$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \lim_{x \to \pi/3} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad \lim_{x \to \pi/4} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \lg \sin x = \lg \sin \frac{\pi}{2} = \lg 1 = 0, \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Reducerea la cazul aflării limitei unei funcții continui

Se cere să se afle limita funcției $\frac{x^2-9}{x-3}$ pentru $x \to 3$*). Căutând limita funcției pentru $x \to 3$, valoarea $x = 3$ se exclude (v. § 39, p. 5).

Această împrejurare ne dă posibilitatea de a simplifica expresia dată prin diferența $x-3$. Se obține funcția $x+3$, $\left(\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3\right)$, identic egală cu cea dată pentru toți $x \neq 3$. Aceasta înseamnă că pentru $x \to 3$ aceste două funcții variază în același mod. Funcția $x+3$ este continuă în punctul $x=3$; de aici obținem: $\lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$. Prin urmare și $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

In mod asemănător aflăm:

$$1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = 3.$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{6}.$$

$$3)\ \lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{(x+4)^2} = \lim_{x\to -4}\frac{x^2+4x-x-4}{(x+4)^2} = \lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)^2} =$$

$$= \lim_{x\to -4}\frac{x-1}{x+4}.$$

Pentru $x \to -4$, numărătorul $x-1 \to -5$, iar numitorul $x+4 \to 0$. Prin urmare, raportul $\frac{x-1}{x+4}$ este o mărime infinit mare pentru $x \to -4$. Când $x \to -4$, rămânând mai mic decât -4, atunci atât numărătorul cât și numitorul raportului considerat sunt nega-

*) Observăm că aici și într'o serie de exemple următoare se caută limita raportului a două mărimi infinit mici. In § 43, p. 2 am stabilit că raportul a doi infiniți mici poate fi o mărime mărginită (incluziv infinit mică și constantă) sau infinit mare. Deaceea raportul a doi infiniți mici poate avea o limită numerică sau simbolică și poate să nu aibă niciun fel de limită.

tivi; deaceea raportul însuşi rămâne pozitiv. Dacă însă $x \to -4$, rămânând mai mare decât -4, atunci numărătorul raportului $\frac{x-1}{x+4}$ păstrează, ca şi înainte, semnul minus, iar numitorul devine o mărime pozitivă. Prin urmare,

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2+3x-4}{(x+4)^2} = \lim_{x \to -4} \frac{1-1}{x+4} = \infty.$$

3. Metoda despărţirii infiniţilor mici

Această metodă se foloseşte cu succes la aflarea limitelor pentru $x \to +\infty$ şi $x \to -\infty$ şi la căutarea limitelor funcţiilor cu argument pozitiv întreg.

Să exprimăm prin exemple această metodă.

Exemplul 1. Se cere să se afle limita funcţiei $\frac{x^3-4x^2+8}{2x^3+5x-1}$ pentru $x \to +\infty$. Impărţind numărătorul şi numitorul expresiei date prin x^3, obţinem:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-4x^3+8}{2x^3+5x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}.$$

Pentru $x \to +\infty$ rapoartele $\frac{4}{x}$, $\frac{8}{x^3}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ sunt mărimi înfinit mici şi, deci, limitele lor sunt egale cu zero.

Din teorema despre limita sumei, tragem concluzia că limitele numărătorului şi numitorului există şi sunt raspectiv egale cu 1 şi 2. Astfel, sunt îndeplinite condiţiile pentru limita unui cât şi obţinem:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}.$$

Exemplul 2. In exemplul precedent am aflat limita raportului a două polinoame de acelaşi grad. Să considerăm acum cazul, când gradul unui termen al raportului este mai mare decât al celuilalt. Se cere, de exemplu, să se afle limita raportului $\frac{3x^4-4x^2+1}{x^3+3x^2+8x}$ pentru $x \to +\infty$. Impărţind numărătorul şi numitorul, termen cu termen, prin x^3, obţinem:

$$\frac{3x^4-4x^2+1}{x^3+3x^2+8x} = \frac{3x-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}.$$

Aici despărțim deasemenea infiniții mici $\frac{4}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{8}{x^2}$ pentru $x \to +\infty$, însă aci primul termen $3x$ al numărătorului este o mărime infinit mare pentru $x \to +\infty$. In felul acesta, pentru $x \to +\infty$ numărătorul fracției date tinde către $+\infty$ iar numitorul are drept limită numărul 1. Prin urmare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 8x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}} = +\infty.$$

Se vede ușor că limita fracției date pentru $x \to -\infty$ este simbolul $-\infty$: termenul $3x$ tinde către $-\infty$ pentru $x \to -\infty$, iar numitorul are, ca și mai înainte, limita 1.

Rezultatele obținute puteau fi prevăzute dinainte: întrucât în exemplu considerat gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, numărătorul crește, pentru $x \to +\infty$ și $x \to -\infty$, mai „repede", în valoare absolută decât numitorul. Deaceea este evident că fracția este o mărime infinit mare.

Evident, dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci fracția este, pentru $x \to +\infty$ și $x \to -\infty$, o mărime infinit mică. Deaceea limita unei astfel de fracții va fi totdeauna egală cu zero pentru $x \to +\infty$ și $x \to -\infty$.

§ 49. Două teoreme despre funcțiile continue

T e o r e m a 1. *O funcție* $f(x)$, *continuă pe segmentul* $[a, b]$, *ia pe acest segment o valoare maximă* M *și o valoare minimă* m (*fig.* 69).

Fig. 69 dă o reprezentare intuitivă a conținutului acestei teoreme: în punctul x_1 funcția continuă pe segmentul $[a, b]$ ia valoarea maximă M, reprezentată pe ordonata x_1M_1 din graficul funcției, iar pentru $x = x_2$ valoarea minimă m egală cu mărimea ordonatei x_2M_2; astfel,

$$f(x_1) = M, \quad f(x_2) = m.$$

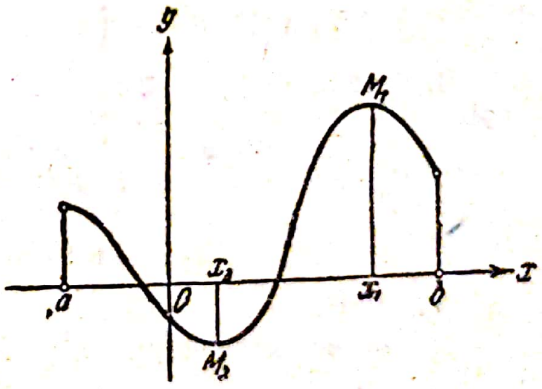

Fig. 69.

Demonstrația acestei proprietăți, evidente în mod intuitiv, nu este suficient de elementară și deaceea nu o aducem în cartea noastră.

T e o r e m a 2. *Dacă o funcție* $f(x)$, *continuă pe segmentul* $[a, b]$, *are la extremitățile segmentului valori de semne contrare, atunci se*

află în interiorul segmentului cel puțin o valoare a argumentului $x = x_1$ *pentru care funcția se anulează* $[f(x_1) = 0]$.

Fig. 70 arată în mod intuitiv exactitatea acestei teoreme: curba continuă care constitue graficul funcției continue pe segmentul $[a, b]$, trebue să taie în interiorul segmentului cel puțin odată axa Ox, pentru a trece dintr'o parte în cealaltă parte a acestei axe.

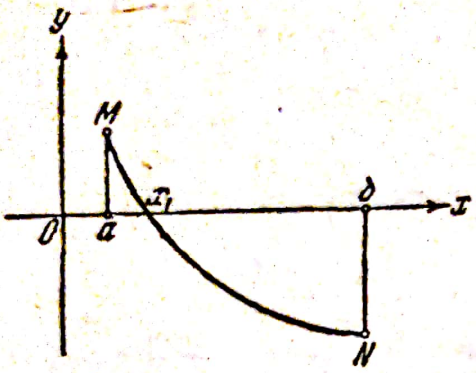

Fig. 70.

Exerciții

La § 35

1. Se dă funcția $f(x) = x^4 - 4x^4 + 6x - 1$. Să se afle $f(0)$; $f(3)$; $f(-2)$.
R: -1; 62; -13.

2. Se dă funcția $f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$. Să se arate, că:
$$f(2) + 2 \cdot f(0) = f(1).$$

3. Se dă funcția $\varphi(u) = u^3 - 3u^2 + 3u - 6$. Să se afle
$\varphi(a)$; $\varphi(-a)$; $\varphi(a + h)$.
R: $a^3 - 3a^2 + 3a - 6$; $-(a^3 + 3a^2 + 3a + 6)$;
$a^3 + 3(h-1)a^2 + 3(h-1)^2 a + (h-1)^3 - 5$.

4. Se dă funcția $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$. Să se afle $\psi(3)$; $\psi(0)$; $\psi(-3)$.

R: $\dfrac{1}{5}\sqrt{15}$; 0; $\sqrt{3}$.

5. Se dă funcția $F(x) = x^5 + 5x^3 - 9x$. Să se arate, că $F(-a) = -F(a)$.
6. Se dă funcția $\varphi(x) = x^2 + 2ax - a^2$. Să se arate că $\varphi(a) + \varphi(-a) = 0$.
7. Se dă funcția $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$. Să se arate, că $f(a) = f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.
8. Se dau funcțiile $f(x) = x^3 + a^3$ și $\varphi(x) = 2ax$. Să se arate, că $f(a) - a\varphi(a) = 0$.
9. Se dă funcția $\varphi(x) = \lg x$. Să se arate, că $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \varphi(x^2 + x)$.
10. Se dă funcția $F(\vartheta) = \operatorname{tg} \vartheta$. Să se arate că:
$$F(2\vartheta) = \frac{2F(\vartheta)}{1 - [F(\vartheta)]^2}.$$

La § 37.

Să se construiască prin puncte graficele următoarelor funcții:

11. $y = x + \dfrac{1}{x}$. 12. $y = \dfrac{3}{3 - x}$. 13. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. 14. $y = 2^x$.

15. $y = \dfrac{4}{x^2}$. 16. $y = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$. 17. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

18. $y = \cos 2x$. 19. $y = \cos 4x$. 20. $y = \cos \dfrac{x}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

La § 46.

21. Să se afle creşterea funcţiei $y = x^3$ pentru $x = 2$ şi pentru valorile creşterii Δx egale cu : *a*) 2; *b*) 0,5; *c*) 0,1.

R: *a*) 56; *b*) 7,625; *c*) 1,261.

22. Să se afle creşterea funcţiei $y = \frac{1}{x}$ pentru $x = 4$ şi $\Delta x = -0{,}1$.

R: $\frac{1}{156}$.

23. Să se afle creşterea funcţiei $y = \lg x$ pentru o valoare arbitrară x şi valori arbitrare ale creşterii Δx.

R: $\Delta y = \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

La § 48.

Să se afle :

24. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 5)$. **R**: 2.

25. $\lim\limits_{x \to c} (x^2 - 4x + 5)$. **R**: $c^2 - 4c + 5$.

26. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2 + 1}{x + 1}$. **R**: -9.

27. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2x + 3}{\sqrt{25 - x^2} + 1}$. **R**: $-\frac{3}{4}$.

28. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{\sin 2x}{2 \cos(\pi - x)}$. **R**: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

29. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3 + x^2}{x^5 + 3x^4 - 2x^2}$. **R**: $-\frac{1}{2}$.

30. $\lim\limits_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$. **R**: 6.

31. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$. **R**: -32.

32. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. **R**: 5.

33. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$. **R**: $-7{,}2$.

34. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$. **R**: 4.

35. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$. **R**: 3.

Scanned with OKEN Scanner

36. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$. R: 6.

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x^3}$. R: $+\infty$.

38. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{(x-1)^3}$. R: $+\infty$.

39. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$. R: -1.

40. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{12}{x^3+8} \right)$. R: $-\dfrac{1}{2}$

41. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 1}$. R: $\dfrac{1}{2}$.

42. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 - 4}{x^2 + 5x^3}$. R: $\dfrac{3}{5}$.

43. $\lim\limits_{x \to +} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3}$. R: $-\dfrac{2}{7}$.

44. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 4x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}$. R: 0.

45. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 2x + 8}{3x^2 + 1}$. R: $+\infty$.

46. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 2x + 8}{3x^2 + 1}$. R: $-\infty$.

47. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$ R: 0.

CAPITOLUL V

NOŢIUNI DESPRE DERIVATĂ

§ 50. Mişcarea uniformă şi viteza ei. Viteza de modificare a unei funcţii liniare

1. Dacă raportul între spaţiul parcurs de un punct material, într'un anumit interval de timp, şi acest interval de timp este o mărime constantă, mişcarea punctului se numeşte *uniformă*.

Acest raport constant determină distanţa parcursă de punct în unitatea de timp (secundă, minut, oră) şi se numeşte *viteza* mişcării uniforme.

Să presupunem că punctul material care se mişcă în mod uniform a parcurs deja spaţiul s_0 când începem să socotim timpul, plecând dela valoarea zero. Fie t un timp oarecare, socotit dela 0. Să însemnăm cu s lungimea spaţiului parcurs de acel punct până în momentul t.

Intrucât s se socoteşte dela aceeaşi origine ca şi s_0, distanţa parcursă de punct în timpul t se defineşte prin diferenţa $s - s_0$.

După definiţia mişcării uniforme, raportul :

$$\frac{s - s_0}{t} = v$$

este o mărime constantă, anume viteza mişcării punctului. Din această egalitate obţinem :

$$s = vt + s_0. \qquad (1)$$

Relaţia (1) se numeşte legea mişcării uniforme.

Vedem că, relaţia (1) reprezintă o funcţie de gradul întâi în raport cu t. Deci, *legea mişcării uniforme se defineşte printr'o funcţie de gradul întâi în raport cu* t. Coeficientul v este viteza mişcării uniforme (mărime constantă).

Invers, este uşor de arătat că funcţia :

$$s = kt + b, \qquad (2)$$

de gradul întâi în raport cu timpul t (k şi b fiind mărimi constante), exprimă legea mişcării uniforme.

In adevăr, să luăm un timp oarecare (arbitrar) t. Spaţiul parcurs de un punct material până în timpul t se determină prin relaţia (2).

Să luăm acum un alt timp t_1. Spaţiul parcurs de punct până în momentul t_1 îl însemnăm cu s_1,

In baza relaţiei (2) obţinem :

$$s_1 = kt_1 + b.$$

Prin urmare, în intervalul de timp $t_1 - t$ punctul va parcurge spaţiul

$$s_1 - s = (kt_1 + b) - (kt + b),$$

sau

$$s_1 - s = k(t_1 - t),$$

de unde

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = k. \qquad (3)$$

Intrucât k este o mărime constantă, ajungem la următoarea concluzie : mişcarea dată prin legea $s = kt + b$ se caracterizează prin

aceea; că raportul dintre spațiul parcurs de punct într'un interval de timp oarecare, și acel interval de timp, este o mărime constantă.

Aceasta este chiar definiția mișcării uniforme.

Diferența $t_1 - t$ este creșterea Δt a timpului, iar diferența $s_1 - s = \Delta s$ este creșterea spațiului (vezi § 46).

Prin urmare în baza egalității (3), putem spune că viteza v a mișcării uniforme este raportul dintre creșterea Δs a spațiului și creșterea Δt a timpului t, care a provocat creșterea spațiului :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

2. Legea variației lungimii unui resort l în funcție de sarcina P este dată de relația :

$$l = kP + l_0. \tag{4}$$

unde k și l_0 sunt mărimi constante (legea lui Hooke cunoscută în tehnică).

Intrucât relația (4) este o funcție de gradul întâi în raport cu P, obținem ca și pentru cazul legii mișcării uniforme :

$$\frac{\Delta l}{\Delta P} = k.$$

Această relație determină lungimea resortului care revine pe unitatea de sarcină. Prin urmare ea arată cât de repede se modifică lungimea resortului la o modificare a sarcinii.

Deaceea mărimea $\frac{\Delta l}{\Delta P}$ poate fi numită viteza de modificare a resortului.

Conform relației (4) lungimea l a resortului este o funcție de gradul întâi în raport cu sarcina P.

Deci procesul de modificare a lungimii resortului în raport cu sarcina este un proces uniform. Vedem deci din nou că viteza unui proces uniform se definește prin raportul dintre creșterea Δl a funcției l și creșterea ΔP a argumentului P care a provocat-o.

3. Să luăm funcția :

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Dacă considerăm x și y ca mărimi matematice, adică fără a le atribui un conținut concret, atunci funcția de gradul întâi (5) va exprima procesul de modificare a mărimii variabile y în funcție de modificarea mărimii x.

Raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ definește acum variația funcției y, corespunzătoare unității de variație a argumentului x.

Scanned with OKEN Scanner

Prin analogie cu noţiunea de viteză a mişcării uniforme şi de viteză a modificării lungimii resortului, este natural să numim raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *viteza de variaţie a funcţiei y în raport cu argumentul x.*

Ştim din geometria analitică că graficul unei funcţii de gradul întâi (5) este o dreaptă.

Deaceea funcţia (5) se numeşte şi *funcţie liniară.* Coeficientul k se numeşte coeficientul unghiular al dreptei exprimate prin ecuaţia :

$$y = kx + b.$$

Acest coeficient îl vom numi deasemenea coeficient unghiular al funcţiei liniare.

Relaţia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

arată că *viteza de variaţie a unei funcţii liniare*

$$y = kx + b,$$

în raport cu argumentul x, este o mărime constantă egală cu coeficientul unghiular k al funcţiei.

Noţiunea astfel stabilită a vitezei de variaţie a unei funcţii liniare concordă pe deplin cu reprezentarea geometrică : cu cât coeficientul unghiular este mai mare, cu atât mai repede se înalţă dreapta care reprezintă funcţia (5) şi cu atât mai repede cresc ordonatele punctelor dreptelor corespunzătoare variaţiei abscisei x.

§ 51. Mişcarea neuniformă şi viteza ei

1. In paragraful precedent am stabilit noţiunea de viteză pentru orice proces uniform de modificare.

Insă cele mai multe procese care trebue observate în natură şi supuse unei cercetări ştiinţifice sunt *neuniforme.*

Este suficient să considerăm chiar numai problema căderii în vid a unui punct material greu sub acţiunea forţei gravităţii. Ştim din fizică că legea căderii unui punct în vid se exprimă prin formula :

$$s = \frac{g}{2} t^2, \qquad (6)$$

unde t este timpul socotit dela începutul căderii, s spaţiul parcurs în timpul t şi g acceleraţia forţei gravităţii, egală cu 9,81 m/s^2. Această mişcare este neuniformă întrucât legea ei se exprimă printr'o funcţie de gradul doi în raport cu t pe când legea oricărei mişcări uniforme este, cum am văzut, o funcţie de gradul întâi în raport cu t.

Trebue să cercetăm acum problema determinării vitezei unui proces de modificare neuniformă.

Cercetarea acestei probleme o vom începe cu problema determinării vitezei unei mişcări neuniforme.

Pentru o mai bună lămurire a mersului raţionamentului să ne oprim la exemplul căderii unui punct material în vid.

Am stabilit că mărimea vitezei unei mişcări uniforme poate fi definită prin raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Să încercăm să plecăm dela un raport de aceeaşi formă, şi la cercetarea problemei vitezei unei mişcări neuniforme.

Să luăm un timp anumit t. Să admitem că în acel moment punctul se află în poziţia M (fig. 71). Mărimea spaţiului $s = OM$, parcurs de punct în timpul t, este definită de formula (6) :

$$s = \frac{g}{2} t^2.$$

Să dăm timpului ales t, creşterea Δt. Să admitem că în momentul $t + \Delta t$ punctul va avea poziţia M'. Creşterea MM' a spaţiului, corespunzătoare intervalului de timp Δt, o notăm cu Δs.

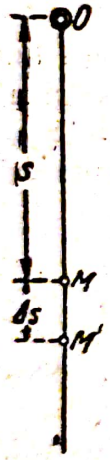

Fig. 71.

Inlocuind în formula (6) pe t prin mărimea $t + \Delta t$, aflăm pentru valoarea nouă a spaţiului OM' expresia :

$$s + \Delta s = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2.$$

Scăzând de aici membru cu membru egalitatea (6) aflăm pe Δs :

$$s + \Delta s = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2$$

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

$$\Delta s = \frac{g}{2} [t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 - t^2]$$

sau

$$\Delta s = \frac{g}{2} [2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2].$$

Impărţind Δs prin Δt, obţinem o expresie care defineşte pe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t},$$

sau simplificând prin Δt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t). \qquad (7)$$

Pentru mişcarea uniformă raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, care defineşte viteza mişcării, este o mărime constantă; ea rămâne neschimbată pentru orice valoare t şi pentru orice valoare Δt.

Deaceea pentru aflarea vitezei unei mişcări uniforme se poate lua orice moment t şi orice creştere Δt.

Alta este situaţia în cazul unei mişcări neuniforme. Din exemplul căderii unui punct material vedem, din egalitatea (7), că raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ depinde de t şi de Δt. Unui acelaşi Δt îi corespund în momente diferite valori diferite ale raportului $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Astfel pentru $\Delta t = 0{,}1$, timpului $t = 1$ secundă îi corespunde valoarea:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2 \cdot 1 + 0{,}1) = 2{,}1 \cdot \frac{g}{2} = 1{,}05g,$$

timpului $t = 3$, valoarea:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0{,}1) = 6{,}1 \cdot \frac{g}{2} = 3{,}05g, \text{ etc.}$$

Deaceea noţiunea de viteză a unei mişcări neuniforme poate fi raportată numai la un anumit moment.

Nu se poate vorbi despre viteza de cădere a unui punct material în general, ci numai despre viteza cu care punctul cade într'un anumit moment al timpului, despre *viteza instantanee* de cădere.

Cum să definim noţiunea de viteză instantanee?

Cum vedem din aceeaşi relaţie (7), pentru o valoare neschimbată t raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ depinde de mărimea Δt. Astfel, de exemplu, luând $t = 3$ şi $\Delta t = 0{,}5$ obţinem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0{,}5) = 6{,}5 \cdot \frac{g}{2} = 3{,}25\,g,$$

pentru $\Delta t = 0{,}1$ avem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0{,}1) = 6{,}1 \cdot \frac{g}{2} = 3{,}05g, \text{ etc.}$$

Să admitem în mod trecător că din poziţia M în poziţia M' (fig. 71) punctul se mişcă în mod uniform.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci viteza căderii punctului ar fi în tot intervalul de timp Δt egală cu

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t)$$

şi ar rămâne constantă. La fel cum spunem, de exemplu, că un tren care circulă dela Moscova la Leningrad merge pe distanţa dintre staţiile Calinin şi Bologoie cu o viteză medie de 50 km/oră, tot astfel vom numi şi aici această viteză constantă $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *viteza medie* de cădere a punctului în porţiunea MM'.

Cum am constatat, viteza medie se modifică odată cu modificarea lui Δt şi este perfect limpede că ea caracterizează cu atât mai bine starea corpului în cădere în momentul t, cu cât va fi mai mic intervalul Δt care a trecut din acel moment.

De aici tragem în mod natural concluzia că *viteza intantanee* v *de cădere a punctului în momentul* t *trebue definită ca limita vitezei medii* v_m *pentru* $\Delta t \to 0$.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m.$$

Astfel obţinem :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \left[\frac{g}{2}(2t + \Delta t)\right] = gt.$$

2. Să ne referim la cazul general al unei mişcări neuniforme şi să notăm cu s spaţiul parcurs de un punct material în timpul t. Intrucât fiecărei valori a timpului t îi corespunde o valoare determinată a spaţiului s pe care corpul l-a parcurs în acest timp, înseamnă că mărimea s este o funcţie de t:

$$s = f(t).$$

Pentru definirea vitezei instantanee a punctului într'un moment determinat t, vom afla mai întâi viteza medie a mişcării în intervalul de timp dela t la $t + \Delta t$.

In timpul t punctul a parcurs spaţiul $s = f(t)$; în timpul $t + \Delta t$ spaţiul $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$. Prin urmare spaţiul Δs, parcurs de punct în intervalul Δt, este definit prin expresia :

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Obţinem *viteza medie* v_m pe intervalul Δt, dacă împărţim Δs prin Δt :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecând acum la limita $\Delta t \to 0$, aflăm viteza adevărată a punctului în momentul t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Deci *se numeşte viteza adevărată sau instantanee v a unui punct material în momentul t limita către care tinde viteza medie v_m din intervalul de timp Δt, când $\Delta t \to 0$.*

3. *Observaţia 1.* Definiţia vitezei mişcării neuniforme cuprinde, ca un caz particular, şi noţiunea vitezei mişcării uniforme.

In adevăr, întrucât viteza $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a mişcării uniforme este o mărime constantă, iar limita unei constante este egală cu însăşi constanta, avem pentru cazul mişcării uniforme:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Observaţia 2. In tot raţionamentul nostru am considerat momentul $t + \Delta t$, ca fiind posterior momentului t, adică am socotit creşterea Δt totdeauna pozitivă.

Totuşi nu se schimbă nimic dacă considerăm momentul $t + \Delta t$ anterior momentului t. In adevăr, am definit viteza v ca limita vitezei medii v_m pentru $\Delta t \to 0$, iar noţiunea limitei cere ca v_m să tindă către un număr anumit, independent de modul cum Δt tinde către 0.

§ 52. Viteza de variaţie a funcţiei

1. In § 50 am fixat noţiunea vitezei oricărui proces uniform de modificare a unei mărimi variabile, care depinde de variaţia altei mărimi. Să stabilim acum noţiunea de viteză pentru cazul unui proces de variaţie neuniform.

Să luăm funcţia $y = f(x)$ şi să considerăm x şi y ca mărimi matematice, adică fără a le atribui vreun conţinut fizic. Atunci funcţia $y = f(x)$ va exprima numai procesul modificării variabilei y în funcţie de variaţia mărimii x.

Să presupunem că creşterea Δx, atribuită unei valori date x, atrage după sine creşterea Δy a funcţiei y. Raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ arată de câte ori, în medie, y variază mai repede sau mai încet în comparaţie cu variaţia lui x, când x se modifică cu mărimea Δx.

Deaceea raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ poate fi numit viteza medie v_m de variaţie a lui y în raport cu x, când x variază cu mărimea Δx. Este natural

să numim viteza (v) de variație a funcției y pentru o valoare dată x, limita acestui raport pentru $\Delta x \to 0$.

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Deci, *viteza de variație a funcției y pentru o valoare dată x se numește limita raportului dintre creșterea Δy a funcției y și creșterea Δx a argumentului x, când $\Delta x \to 0$.*

2. Extinderea noțiunii de viteză la orice proces de variație, stabilită în felul acesta, se aplică în diferite domenii ale științei.

Astfel, am văzut că, înțelegând prin x timpul și prin y spațiul parcurs de un punct material în timpul x, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ definește viteza mișcării punctului în momentul x.

Să mai luăm câteva exemple.

1) Când un corp solid se rotește în jurul unei axe, atunci unghiul de rotație φ este, evident, o funcție de timpul t.

Dacă în intervalul de timp dela t la $t + \Delta t$ corpul s'a rotit cu unghiul $\Delta\varphi$, atunci raportul $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ dă *viteza medie unghiulară* de rotație în intervalul de timp Δt, iar

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

viteza unghiulară de rotație în momentul t.

2) Să însemnăm cu Q cantitatea de materie care intră într'o reacție chimică până în momentul t.

Raportul $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ dă viteza medie a reacției chimice în intervalul de timp dela t la $t + \Delta t$, iar

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

viteza reacției chimice în momentul t.

3) Să însemnăm cu ϑ temperatura (în grade C) și cu W cantitatea de căldură (în calorii), care trebue transmisă unui corp pentru a-l încălzi dela 0° la ϑ°.

Evident, W este funcție de ϑ : $W = f(\vartheta)$. Să dăm lui ϑ creșterea $\Delta\vartheta$. Atunci W va suferi creșterea ΔW. Raportul $\frac{\Delta W}{\Delta\vartheta}$ definește creșterea medie a cantității de căldură, calculată pe unitatea de creștere a temperaturii ϑ. Această viteză medie de modificare a cantității de căldură se numește capacitate calorică medie a corpului la încălzirea dela ϑ° la $(\vartheta^\circ + \Delta\vartheta)$.

Viteza de modificare a cantității de căldură la o temperatură dată ϑ°, adică

$$\lim_{\Delta\vartheta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta\vartheta}$$

se numește capacitate calorică a corpului pentru temperatura dată ϑ°.

4) Să însemnăm cu Q cantitatea de electricitate (în coulombi) care trece în timpul t prin secțiunea unui conductor. Intensitatea curentului I se numește

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Această limită determină cantitatea de electricitate care trece prin secțiunea conductorului, raportată la unitatea de timp.

Astfel intensitatea curentului este viteza de modificare a unui proces fizic.

§ 53. Derivata

1. Vedem, prin urmare, că găsirea unei limite de forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f'x)}{\Delta x}$$

pentru $\Delta x \to 0$ este legată în mod esențial de stabilirea unor noțiuni fundamentale din cele mai variate domenii ale științei. De-aceea în analiza matematică se acordă o atenție deosebită acestei limite și i se dă o denumire specială.

Această limită se numește derivata funcției $y = f(x)$ în raport cu argumentul x. Definiția exactă a derivatei este următoarea :

Derivata funcției $y = f(x)$ în raport cu variabila x, pentru o valoare dată x (într'un punct dat), se numește limita raportului dintre creșterea Δy a funcției y și creșterea Δx a argumentului x, când Δx tinde către 0.

Pentru notarea derivatei se întrebuinţează simbolul y' sau $f'(x)$. Astfel :

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Folosind definiţia derivatei introdusă mai sus, putem formula toate rezultatele stabilite în paragraful precedent, în felul următor :

1) *Viteza variaţiei funcţiei* $y = f(x)$ *pentru o valoarea dată* x *este derivata funcţiei* y *în raport cu* x *în punctul dat.*

2) *Viteza instantanee a unei mişcări este derivata spaţiului parcurs* s *în raport cu timpul* t.

3) *Viteza unghiulară de rotaţie a unui corp în jurul unei axe este derivata unghiului de rotaţie* φ *în raport cu timpul* t.

4) *Viteza unei reacţii chimice este derivata cantităţii de materie* Q, *care intră în reacţie, în raport cu timpul* t.

5) *Capacitatea calorică a unui corp este derivata cantităţii de căldură* Q *în raport cu temperatura* ϑ.

6) *Intensitatea unui curent este derivata cantităţii de electricitate scursă* Q *în raport cu timpul* t.

Calculul în raport cu timpul t, studierea şi întrebuinţarea derivatelor constitue obiectul principal al *calculului diferenţial.*

2. Procedeul de calculare a derivatei se numeşte *diferenţiere.*

Deaceea dacă spunem : „să se diferenţieze o funcţie dată" este acelaşi lucru cu „să se calculeze derivata unei funcţii date".

Conform definiţiei derivatei, trebue să efectuăm următoarele operaţiuni pentru a diferenţia o funcţie (*regula generală pentru calcularea derivatei*).

1) Să calculăm valoarea funcţiei, corespunzătoare valorii date a argumentului.

2) Să atribuim valorii date a argumentului creşterea Δx şi să calculăm noua valoare $y + \Delta y$ a funcţiei.

3) Să scădem valoarea anterioară a funcţiei din cea nouă şi să determinăm astfel creşterea funcţiei, Δy.

4) Să scriem raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, adică să împărţim creşterea calculată, Δy, prin Δx.

5) Să aflăm limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$. Această limită va fi derivata căutată.

Să analizăm un număr de exemple, pentru a ilustra regula generală de diferenţiere.

Convenim să notăm cu simbolul :

$$y_{x=c}$$

valoarea funcţiei y, corespunzătoare valorii argumentului $x = c$.

Exemplul 1. Să se afle derivata funcției $y = x^2$ în punctul $x = 3$.

Rezolvare.

$$1)\ y_{x=3} = 3^2 = 9;$$
$$2)\ y_{x=3} + \Delta y = (3 + \Delta x)^2;$$
$$3)\ y_{x=3} + \Delta y = 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$\underline{\qquad y_{x=3} = 9}$$
$$\Delta y = \qquad 6\Delta x + (\Delta x)^2;$$
$$4)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x^*);$$
$$5)\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Exemplul 2. Să se afle derivata funcției $y = x^3$ într'un punct oarecare x (pentru o valoare a argumentului x).

Rezolvare. Întrucât valoarea funcției y pentru o valoare a argumentului x se definește prin relația $y = x^3$, prima operațiune se reduce la a scrie pur și simplu :

$$1)\ y = x^3;$$
$$2)\ y + \Delta y = (x + \Delta x)^3;$$
$$3)\ y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$\underline{\qquad y = x^3}$$
$$\Delta y = \qquad 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$
$$4)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2;$$
$$5)\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

Exemplul 3. Să se afle derivata funcției $y = 3x^2 + 5$ într'un punct oarecare x.

Rezolvare.
$$1)\ y = 3x^2 + 5.$$
$$2)\ y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5;$$
$$3)\ y + \Delta y = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$$
$$\underline{\qquad y = 3x^2 \qquad\qquad\qquad + 5}$$
$$\Delta y = \qquad 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2;$$
$$4)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3 \cdot \Delta x;$$
$$5)\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Exemplul 4. Să se deriveze funcția $y = \frac{c}{x^2}$.

---

*) Simplificarea prin Δx este aici perfect admisibilă, întrucât la operațiunea a cincea, limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se caută pentru $\Delta x \to 0$, și atunci, cum știm, valoarea $\Delta x = 0$ se exclude din cercetare (v. § 39, p. 5).

Rezolvare.

1) $y = \frac{c}{x)^2}$;

2) $y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$;

3) $y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$

$y = \frac{c}{x^2}$

$$\Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = -\frac{c \cdot \Delta x(2x + \Delta x)}{x^2 (x + \Delta x)^2};$$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \cdot \frac{2x + \Delta x}{x^2 (x + \Delta x)^2}$;

5) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \cdot \frac{2x}{x^4} = -\frac{2c}{x^3}$.

Exemplul 5. Să se diferenţieze funcţia $y = kx + b$.

Rezolvare.

1) $y = kx + b$;

2) $y + \Delta y = k(x + \Delta x) + b$;

3) $y + \Delta y = kx + k \cdot \Delta x + b$

$y = kx + b$

$\Delta y = k \cdot \Delta x$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$;

5) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, întrucât k este o mărime constantă.

In § 50 am stabilit că viteza de variaţie a unei funcţii liniare se determină prin mărimea coeficientului k şi deaceea această viteză este o mărime constantă pentru orice x.

In § 52 am dat interpretarea derivatei unei funcţii oarecare ca fiind viteza variaţiei ei pentru o valoare dată x.

Vedem prin urmare că rezultatul obţinut acum concordă pe deplin cu concluzia trasă în § 50.

Exemplul 6. Să se afle $f'(2)$ şi $f'(-3)$ ale funcţiei $f(x) = 3x^2 + 5$ (adică să se afle derivatele în punctele $x = 2$ şi $x = -3$ ale funcţiei date).

Rezolvare. In exemplul 3 am aflat expresia care determină derivata funcţiei date pentru orice valoare x

$$y' = f'(x) = 6x.$$

Simbolul $f'(x)$ reprezintă valoarea derivatei pentru $x = 2$. Prin urmare

$$f'(2) = 6 \cdot 2 = 12 \quad \text{şi} \quad f'(-3) = 6 \cdot (-3) = -18.$$

3. Exemplele tratate arată că valoarea numerică a derivatei depinde de valoarea numerică a argumentului pentru care se calculează derivata funcţiei date.

Aceasta înseamnă că derivata $f'(x)$ a funcției date $f(x)$ este, la rândul ei, o funcție nouă a argumentului x.

Astfel, căutarea expresiei generale pentru derivata $f'(x)$ a funcției date $f(x)$, adică aflarea derivatei pentru o valoare oarecare x duce la formarea unei funcții noi $f'(x)$ cu același argument ca și funcția dată *).

Trebue totuși să reamintim că în timpul diferențierii valoarea arbitrară a argumentului x este considerată invariabilă și limita raportului între creșterea funcției și creșterea Δx a argumentului se află cu condiția ca Δx să tindă către zero, în timp ce valoarea aleasă arbitrară pentru x rămâne neschimbată.

Cu alte cuvinte, raportul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

este pentru $\Delta x \to 0$, o funcție de creșterea Δx.

§ 54. Inclinarea curbei. Tangenta la curbă. Normala

1. Coeficientul unghiular k al dreptei, dată prin ecuația $y = kx + b$ se mai numește *înclinarea* dreptei. Această denumire are o legătură strânsă cu reprezentarea geometrică : cu cât k este mai mare, cu atât mai repede se ridică dreapta și cu atât este mai mare înclinarea ei față de sensul pozitiv al axei Ox ; și invers, cu cât este mai mare înclinarea dreptei, cu atât coeficientul k este mai mare.

Dacă $k < 0$, atunci dreapta formează un unghi obtuz cu sensul pozitiv al axei Ox : dreapta „cade", dacă privim spre partea absciselor pozitive. In cazul aceasta și înclinarea dreptei este negativă.

Noțiunea derivatei permite să definim și înclinarea unei linii curbe. Insă, întrucât înclinarea curbei se modifică în fiecare punct, este evident că definiția înclinării nu poate fi raportată la întreaga curbă, ci poate fi stabilită numai cu referire la un punct dat al curbei.

Prin înclinarea curbei într'un punct dat se înțelege coeficientul unghiular al tangentei, dusă la curbă în punctul dat.

Astfel, pentru determinarea înclinării unei curbe trebue să știm să determinăm coeficientul unghiular al tangentei la curbă într'un punct (x, y), când sunt date ecuația curbei $y = f(x)$ și coordonatele punctului (x, y).

Ce este însă tangenta la curbă ?

2. In geometria elementară se definește tangenta la cerc, acea dreaptă care are numai un punct comun cu cercul.

---

*) De aici și termenul de „derivată" care înseamnă prescurtarea din „funcția derivată".

Scanned with OKEN Scanner

Această definiţie este însă valabilă numai cu referire la cerc. In adevăr, dacă am încerca să aplicăm această definiţie parabolei $y=x^2$ (fig. 52), atunci, în origine, ambele axe de coordonate ar fi cuprinse de această definiţie.

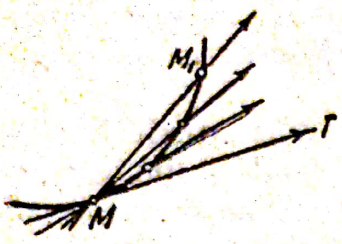

Fig. 72.

Pe de altă parte este evident că în realitate numai axa Ox este tangentă la parabolă în origine.

Astfel, definiţia arătată a tangentei la cerc nu poate fi aplicată la alte curbe, iar noi trebue să dăm o definiţie generală a tangentei.

Pentru definirea tangentei în punctul M la o curbă dată, procedăm în felul următor: luăm pe curbă, afară de punctul M, încă un punct M_1 (fig. 72) şi ducem secanta MM_1.

Când punctul M_1 se va deplasa în lungul curbei, secanta MM_1 se va roti în jurul punctului M.

Tangenta la curbă în punctul M se numeşte poziţia limită MT a secantei MM_1, atunci când punctul M_1, deplasându-se în lungul curbei, tinde să coincidă cu M.

Când curba este dată prin ecuaţia $y = f(x)$ este suficient pentru a duce tangenta în punctul (x, y), să cunoaştem coeficientul unghiular al tangentei.

Să vedem cum putem afla coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul M.

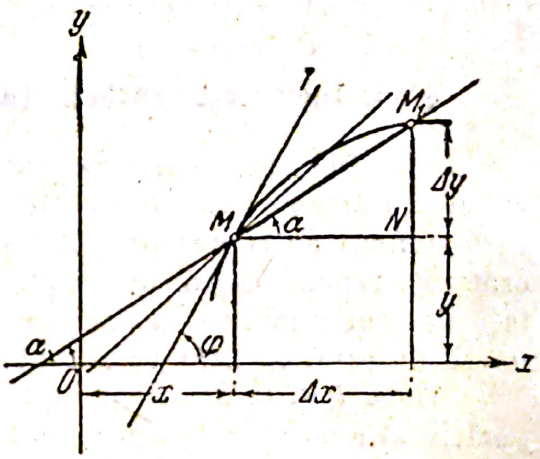

Fig. 73.

Dând abscisei x a punctului M creşterea Δx, vom trece dela punctul M la punctul M_1 de abscisă $x + \Delta x$ şi ordonată $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ (fig. 73).

Coeficientul unghiular, adică tg α pentru secanta MM_1, se determină din triunghiul dreptunghic MNM_1.

In acest triunghi cateta NM este egală cu creşterea Δx a abscisei x a punctului M, iar cateta NM_1 este creşterea corespunzătoare a ordonatei y:

$$NM_1 = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Aceasta înseamnă că:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Când Δx tinde către zero, punctul M_1 deplasându-se în lungul curbei, va tinde să coincidă cu punctul M.

Deaceea pentru a afla coeficientul unghiular al tangentei, trebue găsită limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$. Notând cu φ unghiul de înclinare al tangentei faţă de axa Ox, ajungem astfel la rezultatul

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Intrucât $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ este derivata $y' = f'(x)$ a funcţiei $y = f(x)$, pentru valoarea lui x egală cu abscisa punctului M, tragem concluzia că *coeficientul unghiular al tangentei la curbă, dată prin ecuaţia* $y = f(x)$ *în punctul* $M(x, y)$ *al curbei, se defineşte prin mărimea derivatei* $y' = f'(x)$ *a funcţiei* $y = f(x)$ *(al cărei grafic este curba dată) pentru valoarea lui* x *egală cu abscisa punctului* M.

Cu alte cuvinte, coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \varphi$ *al tangentei este derivata ordonatei* $y = f(x)$ *în raport cu abscisa* x.

Totodată am rezolvat şi problema de a afla înclinarea curbei într'un punct dat, deoarece am numit înclinarea curbei înclinarea tangentei, adică coeficientul ei unghiular.

Exemplul 1. Să se afle înclinarea curbei $y = x^3$ în punctul $(2, 8)$.

Rezolvare. In exemplul 2, § 53 am aflat derivata funcţiei $y = x^3$ pentru o valoare oarecare x: $y' = 3x^2$.

Pentru a afla înclinarea curbei în punctul de abscisă 2, vom înlocui pe x prin 2 în expresia generală a derivatei şi vom obţine astfel:

$$y' = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

3. Să deducem forma generală a ecuaţiei tangentei la curbă, dată prin ecuaţia $y = f(x)$ în punctul de coordonate x_0, $y_0 = f(x_0)$.

Ecuaţia tangentei fiind o dreaptă care trece prin punctul (x_0, y_0) se scrie sub forma:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

unde k este înclinarea curbei, adică coeficientul unghiular al tangentei.

Ţinând seama de sensul geometric al derivatei, avem $k = f'(x_0)$. Prin urmare, ecuaţia tangentei în forma ei finală se scrie astfel:

$$y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0).$$

Exemplul 2. Să se afle ecuaţia tangentei la parabola $y = x^2$:

a) în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; *b)* în origine.

Rezolvare.

a) Avem $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{4}$.

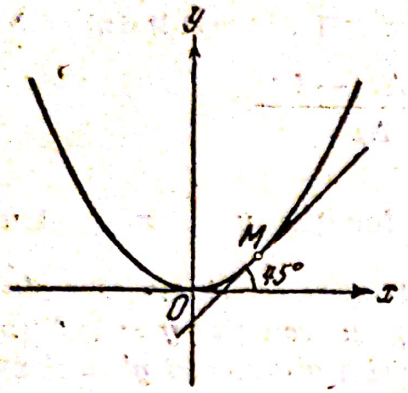

Fig. 74.

Diferențiem funcția $f(x) = x^2$ după regula generală și obținem $f'(x) = 2x$;

prin urmare, $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Înlocuind valorile numerice ale coordonatelor x_0, y_0 și a derivatei $f'(x_0)$ în ecuația tangentei în forma ei generală, obținem ecuația:

$$y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Întrucât coeficientul unghiular al tangentei este egal cu 1, tangenta la parabola $y = x^2$, dusă în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, formează cu axa Ox un unghi de $\frac{\pi}{4}$ radiani (fig. 74).

b) Aici $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ și $f'(x_0) = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.
Prin urmare, tangenta se exprimă prin ecuația:

$$y = 0.$$

Vedem de aici că tangenta dusă la parabola $y = x^2$ în vârful ei este axa Ox (v. pct. 2 al acestui paragraf).

4. *Dreapta perpendiculară pe tangentă dusă în punctul de contact se numește normala la curbă.*

Folosind notațiile dela pct. 3, tragem concluzia că, în baza condiției de perpendicularitate a două drepte, coeficientul unghiular al normalei este egal cu $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

Deaceea ecuația normalei are forma:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

sau

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Exemplul 3. Să se afle ecuația normalei la parabola $y = x^2$: *a*) în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; *b*) în origine.

Rezolvare. a) Folosind ecuația normalei în forma ei generală, ajungem la ecuația:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\left(y - \frac{1}{4}\right) = 0$$

sau

$$4x + 4y - 3 = 0.$$

b) Intrucât aici $f'(x_0) = 0$ și $x_0 = 0$, ecuația normalei are forma :

$$x = 0,$$

de unde vedem că normala la parabola $y = x^2$, dusă în vârful ei este axa Oy, cum era de așteptat în virtutea rezultatului dela punctul *b*) din problema precedentă.

5. In § 53 (exemplul 5) am aflat că derivata funcției liniare $y = kx + b$ este egală cu coeficientul k pentru orice valoare x.

Acest rezultat este complect clar din punct de vedere geometric : derivata este coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției.

Intrucât graficul funcției $y = kx + b$ este dreapta cu coeficientul unghiular k, iar tangenta la dreapta, dusă în orice punct, coincide cu însăși dreapta, rezultă că și coeficientul unghiular al tangentei, adică derivata funcției $y = kx + b$, este o mărime constantă, egală cu coeficientul k.

§ 55. Legătura dintre existența derivatei și continuitatea funcției

Studiind noțiunea derivatei, am lăsat până acum la o parte stabilirea condițiilor care trebue să fie îndeplinite pentru ca să existe derivata într'un punct dat.

Se constată că o funcție poate avea o derivată pentru o valoare dată a argumentului numai în cazul când ea este continuă în punctul dat.

Această afirmație rezultă din teorema următoare :

Teoremă. *Dacă funcția* $y = f(x)$ *are o derivată* $y' = f'(x)$ *pentru o valoare dată* x, *atunci funcția* $y = f(x)$ *este continuă pentru această valoare* x.

Demonstrația. Intrucât $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, urmează după definiția limitei, că diferența

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

este o mărime infinit mică pentru $\Delta x \to 0$.

Determinând din această egalitate creșterea Δy, obținem :

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \qquad (8)$$

unde $\alpha \to 0$, când $\Delta x \to 0$. Pentru o valoare dată x, derivata $f'(x)$ este o mărime constantă.

Aceasta înseamnă că $f'(x) \cdot \Delta x \to 0$, când $\Delta x \to 0$. Astfel, pentru $\Delta x \to 0$, ambii termeni din partea dreaptă a formulei (8) tind către zero. Aici, și $\Delta y \to 0$ când $\Delta x \to 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Ori, aceasta înseamnă că pentru o valoare dată x, funcţia este continuă (vezi definiţia continuităţii funcţiei § 47).

Propoziţia inversă nu este adevărată : o funcţie, continuă într'un punct dat, poate să nu aibă derivată în acel punct. Vom întâlni un astfel de caz în § 75.

Totuşi în practică vom avea a face în majoritatea cazurilor numai cu funcţii continue care au derivate în toate punctele.

Exerciţii

La §§ 51 şi 52

1. Să se determine viteza mişcării unui punct la sfârşitul secundei a treia, dacă spaţiul de s metri, parcurs de punct în t secunde, se exprimă astfel : $s = 2t^3 - 3$.

R : 54 m/s.

2. Când este egală cu zero viteza unui punct, care se mişcă după legea $s = t^2 - 4t + 5$?

R : Pentru $t = 2$.

3. Să se determine viteza de variaţie a funcţiei $y = 3x^2 - 4x + 2$, pentru $x = \frac{2}{3}$.

R : 0.

4. Să se determine viteza medie de variaţie a funcţiei $y = x^2 - 3$ când x variază dela $x = 2$ la $x = 3{,}5$ şi să se afle viteza de variaţie $x = 2$ şi $x = 3{,}5$.

R : 5,5 ; 47.

La §§ 53 şi 54

5. $f(x) = 3x^2$. Să se afle $f'(2)$; $f'(-3)$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

R : $f'(2) = 12$; $f'(-3) = -18$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$.

6. $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Să se afle $f'(0)$; $f'(1)$; $f'(-2)$; $f'(\sqrt{2})$.

R : $f'(0) = 0$; $f'(1) = 1$; $f'(-2) = 4$; $f'(\sqrt{2}) = 2$.

7. $f(x) = \frac{1}{x}$. Să se afle $f'(2)$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f'(\sqrt{2})$.

R : $f'(2) = -\frac{1}{4}$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$; $f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$.

8. Să se afle derivata funcţiei $y = x^2 + 1$ într'un punct oarecare.

R : $y' = 2x$.

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se afle derivata funcţiei $y = 2x^2 - 4x + 2$ într'un punct oarecare.

R: $y' = 4x - 4$.

10. Să se afle derivata funcţiei $y = \frac{1}{x^2}$ într'un punct oarecare.

R: $y' = -\frac{2}{x^3}$.

Aplicând regula diferenţierii, să se afle înclinările curbelor de mai jos în punctele indicate şi să se construiască în aceste puncte tangentele la curbe.

11. $y = x^2 - 4$, în punctul de abscisă 2.
R: 4.

12. $y = 6 - x^2$, „ „ „ „ 1.
R: —2.

13. $y = \frac{2}{x}$, „ „ „ „ —2.
R: $-\frac{1}{2}$.

14. $y = x - x^2$, „ „ „ „ 0.
R: 1.

15. $y = \frac{1}{x-1}$, „ „ „ „ 3.
R: $-\frac{1}{4}$.

16. $y = \frac{1}{2}x^2$, „ „ „ „ 4.
R: 4.

17: $y = x^2 - 2x + 3$, „ „ „ „ 1.
R: 0.

18. $y = 9 - x^2$, „ „ „ „ —3.
R: 6.

19. Să se afle pe curba $y = 3x^2 - 4x^2$ un punct, în care tangenta la curbă formează cu axa Ox un unghi de $\frac{\pi}{4}$ radiani.

R: $(1, -1)$; $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{13}{243}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

20. La curba, a cărei ecuație este $y = -2x^2 + 8x - 9$ se duce tangenta paralelă cu axa absciselor. Să se determine coordonatele punctului de tangență.

R: $(2, -1)$.

21. Să se afle ecuațiile tangentei și normalei la curba $y = 4x^2 + 4x - 3$ în punctul de abscisă -1.

R: $4x + y + 7 = 0$;
$x - 4y + 11 = 0$.

22. Să se afle ecuațiile tangentei și normalei la hiperbola $y = \frac{1}{x}$ în punctul de abscisă 1.

R: $x + y - 2 = 0$;
$y = x$.

23. In care punct, tangenta la hiperbola $y = x^2 - 4x + 3$, *a*) este paralelă cu axa Ox, *b*) formează cu axa Ox un unghiu de 45°?

R: *a*) $(2, -1)$; *b*) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

24. Să se arate că în niciun punct tangenta la hiperbola $y = \frac{1}{x}$ nu poate fi paralelă cu axa Ox.

25. In care punct tangenta la parabola $y = x^2$, *a*) este paralelă cu dreapta $4x - y + 1 = 0$, *b*) este perpendiculară pe aceeași dreaptă?

R: *a*) $(2, 4)$; *b*) $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{64}\right)$.

26. Sub ce unghi se intersectează tangentele la parabolele $y = \sqrt{5x}$, $y = \frac{x^2}{2}$, duse în punctele lor de intersecție?

R: 90°; arctg $\frac{3}{4}$.

27. Sub ce unghi se intersectează tangentele duse la parabola $y = \sqrt{x}$ și la hiperbola $y = \frac{1}{x}$ în punctul lor de intersecție?

R: arctg 3.

CAPITOLUL VI

FORMULELE ŞI REGULILE FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI DIFERENŢIAL. DERIVATELE FUNCŢIILOR ELEMENTARE

§ 56. Tabela formulelor fundamentale

Regula pentru derivare, dată în § 53, este regula de bază, întrucât ea rezultă chiar din definiţia derivatei. Pe când folosirea regulii fundamentale nu prezintă nicio dificultate pentru expresii simple, aplicarea regulii fundamentale poate fi un lucru destul de anevoios în cazul funcţiilor complicate şi a expresiilor care constau din combinaţii de funcţii, de exemplu, pentru expresii care reprezintă o sumă, un produs sau un cât de funcţii.

Este deaceea natural că, plecând dela regula fundamentală, să stabilim odată pentru totdeauna, în complectare, reguli speciale pentru derivarea sumei, produsului şi câtului unor funcţii şi o regulă care să înlocuiască derivarea funcţiilor complicate.

Vom scrie întâi tabela regulilor şi formulelor fundamentale pentru derivare. Simbolul $(\ )'$ înseamnă că se ia derivata expresiei aflată în paranteză.

Tabela regulilor şi formulelor fundamentale de derivare

I. $(c)' = 0$ (c, mărime constantă).

II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (u şi v sunt funcţii de x).

III. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

IV. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ (c, constantă, u, funcţie de x).

V. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

VI. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

VII. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$*).

VIII. $(\log_e x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

IX. $(a^x)' = a^x \ln a$.

X. $(e^x)' = e^x$.

XI. $(\sin x)' = \cos x$.

XII. $(\cos x)' = -\sin x$.

XIII. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

XIV. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$.

XV. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

*) Despre numărul e v. mai departe, § 64.

XVI. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XVII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XVIII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

XIX. Dacă $y = f(u)$, unde $u = \varphi(x)$, atunci $y_x' = f'(u) \cdot u' = f'(u) \times \varphi'(x)$.

Scopul acestui capitol este deducerea regulilor şi formulelor, cuprinse în această tabelă şi în stăpânirea tehnicei derivării, adică a tehnicei aplicării formulelor fundamentale la derivarea unor expresii complicate.

§ 57. Derivata unei mărimi constante

Am convenit să considerăm mărimea constantă c drept o funcţie y, care primeşte aceeaşi valoare c pentru orice valoare a argumentului x (§ 39):

$$y = c.$$

Dacă dăm argumentului x creşterea Δx, mărimea y nu se schimbă, adică $\Delta y = 0$ şi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ şi deaceea şi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Prin urmare,

$$(c)' = 0.$$

Acest rezultat poate fi stabilit în mod intuitiv pe cale geometrică.

Ecuaţia $y = c$ exprimă o linie dreaptă, paralelă cu axa Ox şi trecând la distanţa c de această axă (fig. 75).

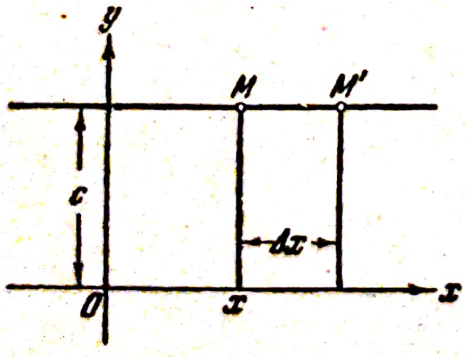

Fig. 75.

Să luăm o valoare oarecare x şi să dăm lui x creşterea Δx. Din figură se vede imediat că $\Delta y = 0$.

Sensul geometric al derivatei constă în aceea că ea este coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul dat. Când $\Delta x \to 0$, punctul M' se apropie nelimitat de punctul M şi „secanta" MM' tinde să ocupe poziţia tangentei la curba noastră în punctul M. Deoarece în cazul nostru curba este o dreaptă, tangenta va coincide chiar cu

„curba". Iar în urma faptului că dreapta $y = c$ este paralelă cu axa Ox şi formează cu aceasta unghiul 0, tangenta va fi deasemenea paralelă cu axa absciselor şi derivata $y' = (c)' = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Deci, *derivata unei constante este egală cu zero.*

§ 58. Derivata unei sume algebrice de funcţii

Funcţile $u = f(x)$ *şi* $v = \varphi(x)$ *au într'un punct anumit derivatele* u' *şi* v'. *Atunci funcţia* $y = u \pm v$ *are deasemenea în acelaşi punct o derivată şi această derivată este egală cu suma algebrică a derivatelor termenilor, adică :*

$$y' = u' \pm v'.$$

1) $y = u \pm v$.

2) Dăm argumentului x creşterea Δx : atunci u, v şi y vor primi respectiv, creşterile Δu, Δv şi Δy. Noile valori ale acestor funcţii : $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $y + \Delta y$ sunt legate prin

3) $y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)$

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = u + \Delta u \pm v \pm \Delta v \\ -y = -u \qquad \pm v \\ \hline \Delta y = \Delta u \pm \Delta v. \end{array}$$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

5) Intrucât, conform premisei, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ şi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'$, obţinem după teorema asupra limitei unei sume :

$$y' = u' \pm v'. \qquad \text{(II)}$$

Acest rezultat poate fi extins prin aceeaşi metodă, oricare ar fi numărul de termeni.

§ 59. Derivata produsului a două funcţii

Funcţiile $u = f(x)$ *şi* $v = \varphi(x)$ *au derivatele* u' *şi* v' *într'un punct anumit. In acest caz funcţia* $y = uv$ *are deasemenea în acelaşi punct o derivată, şi anume :*

$$y' = u'v + v'u.$$

Potrivit regulii generale de diferenţiere avem succesiv :

1) $y = uv$.

2) $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$

3) $y + \Delta y = uv + \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v.$

$$\underline{y = uv}$$

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Conform premisei, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$.

Pentru o valoare dată x şi pentru Δx tinzând către zero, valorile funcţiilor $u = f(x)$ şi $v = \varphi(x)$ rămân neschimbate. Datorită faptului că v (ca şi u) are o derivată în punctul dat, funcţia v (la fel ca şi u) este continuă în acest punct (§ 55).

Rezultă de aici, că $\Delta v \to 0$, când $\Delta x \to 0$ (lafel $\Delta u \to 0$, când $\Delta x \to 0$) (§ 47). Deaceea $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = u' \cdot 0.$

Aplicând acum teorema asupra limitei unei sume algebrice, obţinem, în fine :

$$y' = u'v + v'u. \qquad \text{(III)}$$

Deci, *derivata unui produs de două funcţii, fiecare având derivate într'un punct dat, este egală cu produsul derivatei primei funcţii cu funcţia a doua, plus produsul derivatei funcţiei a doua cu prima.*

In particular, dacă $u = c$, c fiind o mărime constantă, obţinem prin diferenţierea acestui produs după formula (III) :

$$y' = c'v + v'c,$$

şi întrucât, în virtutea formulei (I), $c' = 0$, avem în sfârşit :

$$y' = cv'. \qquad \text{(IV)}$$

Deci, *derivata produsului unei mărimi constante cu o funcţie, care are o derivată într'un punct dat, este egală cu produsul acestei constante cu derivata funcţiei.*

Adeseori această regulă se formulează nu tocmai exact, spunându-se că *un factor constant se scoate înafara semnului de derivare.*

§ 60. Derivata unei puteri întregi pozitive

Dacă $y = x^n$ (n fiind un număr întreg pozitiv), *atunci* $y' = nx^{n-1}$, adică

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad \text{(V)}$$

Demonstraţie.

Urmând regula generală de diferenţiere (§ 53), obţinem :

1) $y = x^n$,

2) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$

sau, după formula binomului lui Newton,

$$y + \Delta y = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots +$$

$$+ nx\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n.$$

3) $$\Delta y = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots +$$

$$+ nx \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n,$$

adică :

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots +$$

$$+ nx \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n .$$

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + nx \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

(am împărţit aici fiecare termen prin Δx).

5) Partea dreaptă a egalităţii obţinute este o funcţie continuă a creşterii Δx. Deaceea la aflarea limitei ei, când $\Delta x \to 0$, se poate calcula valoarea acestui polinom făcându-l pe $\Delta x = 0$ (v. § 48, p. 1). Astfel obţinem :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Formula (V) a fost demonstrată numai pentru un exponent n întreg şi pozitiv.

In § 65 vom arăta că ea rămâne valabilă pentru orice valoare n (fracţionară, negativă, raţională, iraţională). Totuşi, pentru a nu stânjeni elaborarea tehnicei de diferenţiere, ne vom folosi în exemplele pe care le vom trata într'unul din paragrafele următoare, de formula derivatei unei puteri pentru un exponent n oarecare.

Deci, derivata puterii x^n este egală cu exponentul puterii, înmulţit cu baza ridicată la o putere mai mică cu o unitate.

Exemplul 1. Să se deriveze funcţia $y = x^5$.

Rezolvare. Aici $n = 5$. Deaceea obţinem după formula (V) :

$$y' = 5x^4.$$

Exemplul 2. Să se deriveze funcţia $y = \sqrt{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Intrucât $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, obţinem după formula (V):

$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2},$$

sau

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (1)$$

In aplicaţii se întâmplă foarte adeseori să fie necesară derivarea funcţiei $\sqrt{x}$. Deaceea recomandăm reţinerea formulei (1), în loc de a recurge de fiecare dată la formula (V).

Consecinţă. Presupunând în formula (V) $n = 1$, obţinem:

$y = x$ şi $y' = 1 \cdot x^0 = 1$, adică $(x)' = 1$.

§ 61. Derivata unei fracţii

Funcţiile $u = f(x)$ şi $v = \varphi(x)$ au derivatele u' şi v' într'un anumit punct şi, afară de aceasta, v este diferit de zero în acest punct. Atunci funcţia $y = \frac{u}{v}$ are deasemenea o derivată în acel punct şi anume:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad (VI)$$

Dând argumentului x creşterea Δx, obţinem:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Scăzând din această egalitate, membru cu membru, egalitatea $y = \frac{u}{v}$, aflăm Δy:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - \Delta v \cdot u}{v^2 + \Delta v \cdot v}.$$

Mai departe,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u}{v^2 + \Delta v \cdot v}.$$

Conform premisei, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$; valorile funcţiilor $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ sunt mărimi constante pentru un x dat, când $\Delta x \to 0$; $v^2 \neq 0$ şi $\Delta v \to 0$, când $\Delta x \to 0$.

Prin urmare, în baza teoremelor din teoria limitelor, obţinem:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u}{v^2 + 0 \cdot v}$$

sau:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Deobicei relaţia (VI) se formulează, pentru memorizare, în felul următor (nu tocmai exact): *derivata unei fracţii este egală cu derivata numărătorului înmulţită cu numitorul, minus derivata numitorului înmulţită cu numărătorul, totul împărţit prin pătratul numitorului.*

In particular, adică $u = f(x) = c$, c fiind o mărime constantă, obţinem după formula (VI):

$$y' = \frac{c'v - v'c}{v^2},$$

sau, întrucât $c' = 0$,

$$y' = -\frac{cv'}{v^2}. \qquad \text{(VI a)}$$

Dacă $v = c$, atunci $y = \frac{u}{c}$. *In niciun caz nu se va deriva după formula (VI) o fracţie, al cărei numitor este o mărime constantă; trebue să observăm numai că* $\frac{u}{c} = \frac{1}{c} \cdot u$ şi obţinem dintr'odată, după (IV):

$$\left(\frac{1}{c} u\right)' = \frac{1}{c} u'.$$

§ 62. Derivata unei funcţii de funcţie

Se dă funcţia $y = \lg \sin x$. Avem aici o funcţie logaritmică, care are drept argument nu variabila independentă x, ci funcţia $\sin x$ a acestei variabile.

Acest fel de funcţie se numeşte *funcţie de funcţie.*

Să notăm $\sin x$ cu litera u. Atunci $y = \lg u$, unde $u = \sin x$. Am introdus variabila ajutătoare u şi am reprezentat dependenţa funcţională ca o dependenţă a lui y de u şi a lui u de x.

Analog, dacă în relaţia $y = \sqrt{1 + x^2}$ însemnăm $1 + x^2$ cu u, reprezentăm deasemenea această relaţie ca o dependenţă y de u şi u de x.

In general, dacă pentru o funcţie de x dată, stabilim o dependenţă a lui y de o variabilă ajutătoare u, iar a variabilei u de x, adică *dacă* $y = f(u)$, *unde* $u = \varphi(x)$, *atunci o astfel de dependenţă a lui* y *de* x *defineşte o funcţie de funcţie.*

Dacă în relaţia $y = f(u)$ îl înlocuim pe u prin $\varphi(x)$, obţinem relaţia :

$$y = f[\varphi(x)].$$

Din acest mod de scriere se vede imediat că argumentul funcţiei f nu este variabila independentă x, ci funcţia $\varphi(x)$.

Să luăm din nou funcţia :

$$y = \sqrt{1 + x^2} = (1 + x^2)^{1/2}.$$

După care regulă putem afla derivata acestei funcţii ? Nu putem aplica regula derivării unei puteri, fiindcă formula derivatei unei puteri a fost dedusă pentru funcţii de forma x^n, adică pentru puteri a căror bază este însuşi argumentul x, pe când în funcţia $y = (1 + x^2)^{1/2}$ avem ca bază funcţia $1 + x^2$ a argumentului x ; adică funcţia $y = (1 + x^2)^{1/2}$ este puterea unei funcţii.

Este deaceea natural ca formula (V) să nu mai fie valabilă pentru derivarea acestei funcţii şi ar trebui, fie să ne îndreptăm spre regula fundamentală pentru aflarea derivatei, fie să elaborăm o nouă regulă de derivare pentru o funcţie de funcţie.

Scopul acestui paragraf este deducerea acestei reguli.

Se dă, prin urmare, funcţia :

$$y = f(u), \quad \text{unde} \quad u = \varphi(x).$$

Vom presupune că funcţia $u = \varphi(x)$ are o derivată pentru o valoare dată x, iar funcţia $f(u)$ are derivata $f'(u)$ pentru valoarea lui u, corespunzătoare aceleiaşi valori x.

In cazul acesta se spune că u are o derivată în raport cu variabila x şi această derivată se înseamnă cu u' ; în mod analog, $f'(u)$ este derivata funcţiei y în raport cu variabila u, adică

$$f'(u) = y'_u .$$

Pentru stabilirea formulei vom urma regula generală de derivare.

1. Dăm variabilei considerate x creşterea Δx. Funcţia va căpăta creşterea Δu, care, la rândul ei, va determina o creştere Δy a funcţiei $y = f(u)$. Prin urmare, rezultatul primei operaţiuni se prezintă în forma următoare :

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x) ; \quad y + \Delta y = f(u + \Delta u).$$

2. Să determinăm creşterile Δu şi Δy:

$$\begin{array}{r} u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x) \\ u = -\varphi(x) \\ \hline \Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r} y + \Delta y = f(u) + \Delta u) \\ y = -f(u) \\ \hline \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u). \end{array}$$

3. Pentru a obţine derivata y'_x, trebue să aflăm limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$. Insă Δy se apropie de zero nu ca o urmare directă a faptului că Δx tinde către zero, ci prin aceea că creşterea Δy tinde către zero.

Deaceea raportul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

îl vom prezenta sub forma produsului unor rapoarte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(u) + \Delta u - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

4. Acum trebue aflată limita produsului acestor rapoarte pentru $\Delta x \to 0$.

Intrucât, potrivit premisei, funcţia u are derivata u'_x în punctul x considerat, u este o funcţie continuă pentru o valoare dată x (§ 55) şi deaceea $\Delta u \to 0$, când $\Delta x \to 0$.

Mai departe, conform premisei, se ştie că funcţia $y = f(u)$ are ca derivată $y'_u = f'(u)$ pentru valoarea u, corespunzătoare valorii x date.

Astfel obţinem, trecând la limită:

$$y'_x = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'(u) u'_x, \qquad \text{(XIX)}$$

sau mai scurt:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Deci, dacă $y = f(u)$ şi $u = \varphi(x)$, atunci derivata lui y în raport cu variabila x este egală cu derivata lui y în raport cu variabila u, înmulţită cu derivata lui u în raport cu variabila x.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. Să se afle y' a funcției $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Rezolvare. Punând $1 + x^2 = u$, obținem $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + x^2$. De aci aflăm conform formulei (XIX) derivata unei funcții de funcție.

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot (1 + x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

[derivata funcției $u = 1 + x^2$ în raport cu x se calculează ușor după formulele (II), (I) și (IV)].

§ 63. Exemple

Să se deriveze următoarele funcții:

Exemplul 1. $y = 3x^4 - 2x^2$.

Rezolvare. $y' = (3x^4)' - (2x^2)'$ [după formula (II)]
$= 3(x^4)' - 2(x^2)'$ [după formula (IV)]
$= 12x^3 - 4x$ [după formula (V)].

Exemplul 2. $y = x^{\frac{4}{7}} - 2$.

Rezolvare. $y' = \left(x^{\frac{4}{7}}\right)' - (2)'$ [după formula (II)]

$= \frac{4}{7} x^{-\frac{3}{7}}$ [după formulele (V) și (I)]

$= \frac{4}{7x^{\frac{3}{7}}}$

Exemplul 3. $y = \frac{3x^5}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}} + 3\sqrt[7]{x^3}$.

Rezolvare. $y' = \left(3x^{\frac{23}{5}}\right)' - \left(7x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \left(3x^{-\frac{3}{7}}\right)'$ [după formula (II)]

$= \frac{69}{5} x^{\frac{18}{5}} + \frac{7}{3} x^{-\frac{4}{3}} + \frac{9}{7} x^{-\frac{7}{4}}$ [după formulele (IV și (V)].

Exemplul 4. $y = (x^3 + 2)^5$.

Rezolvare. Puterea dată poate fi descompusă după formula binomului lui Newton și apoi derivată după regula derivării unei sume; este însă mai simplă aplicarea formulei derivării unei funcții de funcție.

Punând $x^3 + 2 = u$, prezentăm funcția sub forma unui lanț de relații: $y = u^5$, $u = x^3 + 2$. Apoi obținem după formula (XIX):

$$y'_x = 5u^4 \cdot u_x' = 5(x^3 + 2)^4 (x^3 + 2)' = 5(x^3 + 2)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3 + 2)^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 5. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Rezolvare. Aceasta este o funcție complexă: $y = \sqrt{u}$, $u = a^2 - x^2$. Aplicând formula (XIX), obținem:

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u_x = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (a^2 - x^2)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Notarea procesului derivării unei funcții complexe, ca cea folosită de noi până acum, este deosebit de anevoioasă.

Fie dată funcția $y = \sqrt{a^2 - 2x}$. Se poate vedea imediat că aceasta este o funcție complexă. Înlocuim *în minte* expresia de sub radical, $a^2 - x^2$, prin u, derivăm pe y în raport cu $u = a^2 - x^2$ și înmulțim derivata lui cu u în raport cu x, adică prin $(a^2 - x^2)'$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (a^2 - x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Aici am omis indicele x la indicarea derivatei y'_x. Tot astfel vom proceda și în viitor, fiindcă vom calcula totdeauna derivata în raport cu variabila independentă x.

Însfârșit, după ce cititorul va fi dobândit deprinderea necesară în tehnica derivării, se poate simplifica și ultima formă de scriere, omițând factorul $(a^2 - x^2)'$ și punând în locul lui direct rezultatul derivării bazei $a^2 - x^2$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Exemplul 6. $y = (5x^2 - 4)\sqrt[3]{1 + 3x^2}$.

Rezolvare:

$$y' = \left[(1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}} \right]' (5x^2 - 4) + (5x^2 - 4)' (1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 3x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x \cdot (5x^2 - 4) + 10x (1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}} =$$

[după formula (V)]

$$= \frac{2x (5x^2 - 4)}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}} + 10x \sqrt[3]{1 + 3x^2} = \frac{2x(20x^2 + 1)}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}}$$

[după formulele (XIX), (II) și (V)].

Exemplul 7. $y = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Rezolvare :

$$y' = \frac{(a^2+x^2)'\sqrt{a^2-x^2} - (\sqrt{a^2-x^2})'(a^2+x^2)}{a^2-x^2} =$$

[după formula (VI)]

$$= \frac{2x\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)(a^2+x^2)}{a^2-x^2} =$$

$$= \frac{2x(a^2-x^2)+x(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3a^2x-x^3}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 64. Derivata funcției logaritmice $y = \log_a x$

1. Aplicând acestei funcții mersul general pentru obținerea derivatei, avem :

1) $y = \log_a x$,
2) $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$,
3) $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$

$$y = \log_a x$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x =$$

$$= \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

5) Pentru aflarea limitei expresiei obținute punem $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, de unde $\Delta x = \alpha \cdot x$. Acum vom avea :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\alpha \cdot x} \log_a (1 + \alpha) = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mai departe, este natural să aplicăm teorema asupra limitei produsului. Insă pentru aceasta trebue să știm că există o limită pentru $\Delta x \to 0$, pentru fiecare factor în parte. In ce privește factorul $\frac{1}{x}$, problema se rezolvă simplu : pentru $\Delta x \to 0$ argumentul rămâne neschimbat și deaceea $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. Aceasta înseamnă că problema se re-

duce la aflarea $\lim_{\Delta x \to 0} \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Calcularea acestei limite reclamă cercetări suplimentare.

2. Să ne îndreptăm mai întâi atenția asupra expresiei $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Din relația $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$ urmează că $\alpha \to 0$, când $\Delta x \to 0$. In cursuri complecte de analiză se demonstrează că expresia $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ are o limită pentru $\alpha \to 0$. In acest curs elementar nu vom aduce demonstrația exactă a acestei propoziții, ci ne vom mărgini la următoarele indicații scurte.

Să vedem cum variază expresia: $z = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ când α tinde către zero. Vom da în acest scop lui α diferite valori numerice și vom calcula valorile corespunzătoare pentru z; rezultatele calculului sunt arătate în tabela următoare:

α	z	α	z
10	1,0096		
5	1,4310		
2	1,7320		
1	2,0000		
0,5	2,2500	—0,5	4,0000
0,1	2,5937	—0,1	2,8680
0,01	2,7048	—0.01	2,7320
0,001	2,7169	—0,001	2,7195

Din această tabelă se vede că mărimea $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ se apropie de numărul 2,71... când reducem α în valoare absolută.

Un calcul mai precis arată că aproximativ,

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots$$

Am demonstrat că limita care ne interesează este un număr irațional. S'a convenit a-l însemna cu litera e.

Deci,

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

3. Să ne întoarcem acum la problema calculării expresiei

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Știm acum că $\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$; întrucât $\alpha \to 0$, când $\Delta x \to 0$, putem scrie:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Mai departe, știm că funcția logaritmică este o funcție continuă pentru orice valoare a argumentului (se înțelege, pozitivă). Deaceea, atunci când $z \to e$,

$$\lim_{z \to e} \log_a z = \log_a \lim_{z \to e} z \qquad \text{(v. § 48, pt. 1).}$$

Aflăm astfel:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \log_a \left[\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \log_a e.$$

Prin urmare,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e,$$

adică:

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \qquad \text{(VII)}$$

4. Numărul e are o importanță foarte mare în analiză. In timp ce pentru practica calculului este comod să luăm numărul 10 ca bază a sistemului de logaritmi, pentru scopuri teoretice este mai comod să ne folosim de sistemul de logaritmi a cărui bază este numărul e. Acest avantaj se constată dintr'odată dacă luăm în considerare derivata funcției logaritmice: dacă punem $a = e$, atunci $\log_e e = 1$, și formula (VII) capătă forma:

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(VIII)}$$

Cum vedem, dacă luăm ca bază a logaritmilor numărul e, derivata funcției logaritmice se exprimă mai simplu decât dacă luăm ca bază a logaritmilor orice alt număr a.

Scanned with OKEN Scanner

5. Dealtfel, este şi mai simplu a întocmi tabele de logaritmi având ca bază numărul e. După ce am întocmit astfel de tabele, este uşor de obţinut pe baza lor şi tabele de logaritmi zecimali. In adevăr să presupunem că cunoaştem logaritmul în baza e al numărului N, adică $\log_e N = p$. Aceasta înseamnă că $e^p = N$.

Aplicând ambelor părţi ale acestei egalităţi logaritmii cu baza 10, obţinem : $p \log_{10} e = \log_{10} N$.

Vedem de aici, că pentru a afla logaritmul zecimal, fiind dat logaritmul p al acelui număr calculat pe baza e, este suficient să înmulţim valoarea lui cu $\log_{10} e$. Astfel, cunoscând logaritmii numerelor în baza e, putem afla logaritmii zecimali, înmulţind pe primii cu $\log_{10} e = 0{,}43429...$

Sistemul de logaritmi care are ca bază numărul e se numeşte sistem *natural* sau *neperian*.

Factorul $\log_{10} e$ care serveşte pentru a trece dela sistemul natural de logaritmi la cel zecimal se numeşte *modul*. Evident, în formula (VII) factorul $\log_a e$ este modulul de trecere dela sistemul natural de logaritmi la sistemul de logaritmi cu baza a.

Astfel putem spune :

Derivata logaritmului variabilei independente este egală cu produsul mărimii inverse a variabilei independente x cu modulul sistemului de logaritmi.

Mai departe vom nota logaritmul natural al unui număr N, adică $\log_e N$, cu simbolul $\ln N$.

Cum am văzut, dacă înlocuim în formula (VIII) pe a prin e, obţinem :

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x},$$

întrucât $\log_e e = \ln e = 1$.

Deci, *derivata logaritmului natural al variabilei independente este egală cu mărimea inversă a variabilei independente.*

§ 65. Derivata unei puteri cu un exponent oarecare

Putem demonstra acum pentru cazul unui exponent oarecare exactitatea formulei $(x^n)' = nx^{n-1}$, dedusă în § 60 numai pentru n întreg pozitiv.

Se dă funcţia :

$$y = x^n,$$

unde n este un număr oarecare. Avem $\ln y = n \ln x$.

Funcția $\ln y$ este o funcție de funcție, fiindă se ia logaritmul natural al lui y, iar y este o funcție de x. Deaceea obținem după formulele (VIII) și (XIX):

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Derivata părții din dreapta a egalității $\ln y = n \ln x$ este egală cu:

$$(n \ln x)' = n \cdot \frac{1}{x}.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{n}{x},$$

de unde:

$$y' = (x^n)' = y \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}. \qquad (V)$$

§ 66. Derivata funcției exponențiale

Se numește funcție exponențială o funcție de forma:

$$y = a^x \qquad (a > 0).$$

Pentru a deduce derivata acestei funcții să luăm mai întâi logaritmul ei natural.

$$\ln y = x \ln a.$$

Funcția $\ln y$ este o funcție de funcție, fiindcă se ia logaritmul lui y, iar y este o funcție de x.

Obținem deaceea:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a;$$

de unde:

$$y = (a^x)' = y \ln a = a^x \ln a. \qquad (IX)$$

Deci, *derivata funcției exponențiale a^x este egală cu produsul funcției exponențiale cu logaritmul natural al bazei.*

In cazul particular, când $a = e$, avem funcția $y = e^x$.

După formula (IX) obținem:

$$y' = (e^x)' = e^x \ln e = e^x, \qquad (X)$$

adică *derivata funcției exponențiale e^x este egală cu însăși funcția.*

§ 67. Exemple

Să se afle derivatele următoarelor funcții :

1. $y = \ln (x^3 + 2)$.

Rezolvare.

$$y' = \frac{1}{x^3 + 2} \cdot (x^3 + 2)' \text{ [după formulele (VIII) și (XIX)]}.$$

$$= \frac{3x^2}{x^3 + 2}.$$

2. $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$.

Rezolvare.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (\sqrt{1 - x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} (-2x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Acest exemplu poate fi rezolvat și altfel :

$$y = \ln \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln (1 - x^2),$$

de unde

$$y' = \frac{1}{2} [\ln (1 - x^2)]' \quad \text{[după formula (IV)]},$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x^2} (-2x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

3. $y = a^{4x^2}$

Rezolvare. $y' = a^{4x^2} \ln a \cdot (4x^2)'$ [după formulele (IX) și (XIX)],

$$= a^{4x^2} \ln a \cdot 8x = 8x \ln a \cdot a^{4x^2}.$$

§ 68. Limita raportului $\frac{\sin z}{z}$ pentru $z \to 0$

Aflarea acestei limite este necesară pentru deducerea formulelor pentru derivatele funcțiilor trigonometrice. Vom stabili că :

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Pentru aflarea limitei care ne interesează nu este permis să ne folosim de teorema asupra limitei unui cât, întrucât numitorul rapor-

tului tinde către zero. Aceasta înseamnă că trebue să găsim altă metodă pentru rezolvarea problemei.

Această metodă este următoarea :

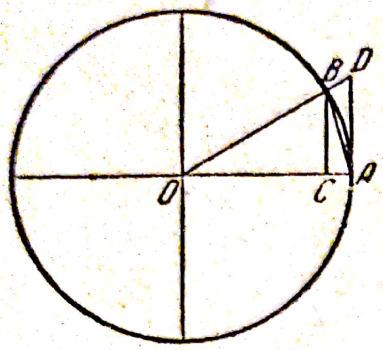

Fig. 76.

Luăm un cerc cu rază egală cu unitatea (fig. 76). Prin z vom înțelege măsura arcului în *radiani*, adică raportul dintre lungimea arcului și rază, care în cazul dat va fi *numeric* egal cu lungimea arcului ; luăm pe z în intervalul dela 0 la $\frac{\pi}{2}$:

$$0 < z < \frac{\pi}{2}.$$

Din fig. 76 avem :

aria $\Delta OAB <$ aria sect. $OAB <$ aria ΔOAD

sau :

$$\frac{1}{2} OA \cdot CB < \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\smile}{AB} < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$

Intrucât $OA = 1$, atunci $CB = \sin z$, $\overset{\smile}{AB} = z$, $AD = \operatorname{tg} z$. Prin urmare, inegalitatea dublă poate fi prezentată astfel :

$$\sin z < z < \operatorname{tg} z.$$

Impărțind această inegalitate dublă prin mărimea *pozitivă* $\sin z$ $\left(\sin z > 0, \text{ întrucât } 0 < z < \frac{\pi}{2}\right)$, obținem :

$$1 < \frac{z}{\sin z} < \frac{1}{\cos z}$$

sau

$$1 > \frac{\sin z}{z} > \cos z.$$

Să facem acum pe z să tindă către zero. In acest caz

$$\lim_{z \to 0} 1 = 1 \text{ și } \lim_{z \to 0} \cos z = 1.$$

Avem deci o mărime variabilă $\frac{\sin z}{z}$, a cărei valoare este cuprinsă în valorile altor două variabile (unitatea și cos z), care au aceeași limită. De aici, în virtutea teoremei 4, § 45, rezultă, că

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Până acum am presupus că z tinde către 0, rămânând o mărime pozitivă. Să presupunem acum că z se apropie de 0, luând valori negative.

Să punem : $z = -z'$. Când $z \to 0$, atunci și $z' \to 0$, însă pe când $z < 0$, variabila $z' > 0$. Datorită faptului că $\sin z = \sin(-z') = -\sin z'$, obținem :

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\sin(-z')}{-z'} = \frac{-\sin z'}{-z'} = \frac{\sin z'}{z'}.$$

Prin urmare,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z'}{z'} = 1.$$

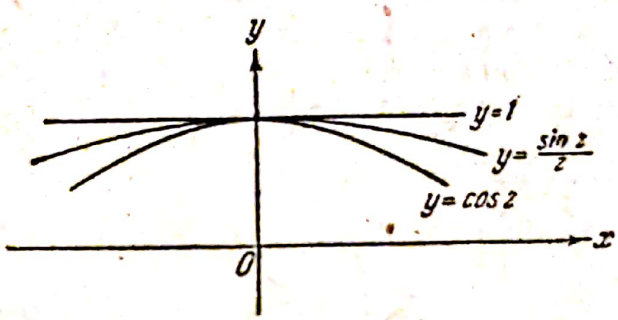

Fig. 77.

Astfel, teorema este adevărată indiferent de modul cum argumentul z tinde către zero.

Pentru a lămuri mai bine rezultatul obținut, să prezentăm grafic curbele $y = 1$, $y = \cos z$ și $y = \frac{\sin z}{z}$ (fig.77).

Curba care reprezintă variabila $y = \frac{\sin z}{z}$ trebue să treacă, conform *inegalității* $1 > \frac{\sin z}{z} > \cos z$, între dreapta $y = 1$ și curba $y = \cos z$. Ordonatele acestor linii ($y = 1$ și $y = \cos z$) au, pentru $z \to 0$, ca limită ordonata $y = 1$; iar, întrucât curba $y = \frac{\sin z}{z}$ nu poate nici să coboare sub curba $y = \cos z$, nici să se ridice peste dreapta $y = 1$, rezultă că :

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$$

este deasemenea egală cu unitatea.

Iată tabela care arată variația raportului $\frac{\sin z}{z}$ când $z \to 0$:

z	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{180}$	...	$\to 0$
$\frac{\sin z}{z}$	0,9798	0,9949	0,9987	0,9999	...	$\to 1$

§ 69. Derivatele funcțiilor trigonometrice

1. Derivata funcției $y = \sin x$

Aplicând regula generală obținem:

1) $y = \sin x$

2) $y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$.

3) $y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$.
$\underline{y = \sin x}$

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2} =$$

$$= 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$4) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin z}{z},$$

unde $z = \frac{\Delta x}{2}$. Pentru $\Delta x \to 0$, variabila z tinde deasemenea către zero.

5) Intrucât $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ este o funcție continuă pentru orice valoare Δx, avem:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos \left(x + \frac{0}{2} \right) = \cos x; \quad \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Prin urmare,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin z}{z} \right] = \cos x.$$

Deci,

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad \text{(XI)}$$

2. Derivata lui cos x

Funcția cos x poate fi scrisă sub forma :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Derivăm acum pe $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ca pe o funcție de funcție și obținem :

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x,$$

fiindcă

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{și} \quad \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -1.$$

Deci,

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad \text{(XII)}$$

3. Derivata lui tg x

Intrucât :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

obținem după formula (VI) a derivatei unei fracții :

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - (-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Deci,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \text{(XIII)}$$

4. Derivata lui ctg x

Deoarece,

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

aflăm după formula derivatei unei fracții :

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad \text{(XIV)}$$

§ 70. Exemple

Să se deriveze următoarele funcţii :

1. $y = \sin 3x^2$.

Rezolvare.

$$y' = \cos 3x^2 \cdot (3x^2)' = 6x \cdot \cos 3x^2. \quad \text{[după formulele (XI) şi (XIX)]}$$

2. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1 - x^3}$.

Rezolvare.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1 - x^3}} \cdot (\sqrt{1 - x^3})' \quad \text{[după formulele (XIII) şi XIX)]}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \sqrt{1 - x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^3}} (1 - x^3)' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3} \cdot \cos^2 \sqrt{1 - x^3}}.$$

3. $y = \cos^3 x$.

Rezolvare. Această funcţie poate fi scrisă sub forma :

$$y = (\cos x)^3.$$

De aici :

$$y' = 3 (\cos x)^2 \cdot (\cos x)' = -3 \sin x \cdot \cos^2 x. \quad \text{[după formulele (V) şi (XIX)]}$$

§ 71. Derivatele funcţiilor trigonometrice inverse

1. Derivata lui arcsin x

Să punem

$$y = \arcsin x,$$

de unde :

$$\sin y = x.$$

Funcţia $\sin y$ este o funcţie de funcţie, întrucât y este o funcţie de x. Derivând ambele părţi ale egalităţii $\sin y = x$ în raport cu x, obţinem :

$$\cos y \cdot y' = 1,$$

de unde aflăm : $y' = \dfrac{1}{\cos y}$.

Intrucât $\sin y = x$, avem $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ *) ; prin urmare

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(XV)}$$

2. Derivata lui arccos x

Să presupunem

$$y = \arccos x,$$

deci

$$\cos y = x.$$

Derivând ambele părţi ale acestei egalităţi în raport cu variabila x, obţinem :

$$-\sin y \cdot y' = 1,$$

de unde

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Intrucât $\cos y = x$, avem $\sin y = \sqrt{1-x^2}$ **) ; prin urmare

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(XVI)}$$

3. Derivata lui arctg x

Punem

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

deci

$$\operatorname{tg} y = x.$$

Derivând ambele părţi ale acestei egalităţi, obţinem :

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1,$$

de unde aflăm :

$$y' = \cos^2 y.$$

---

*) In faţa radicalului luăm semnul plus, întrucât valorile funcţiei $y = \arcsin x$ se iau numai între limitele dela $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}\right)$, iar între aceste limite toate valorile funcţiei $\cos y$ sunt pozitive.

**) In faţa radicalului luăm semnul plus, întrucât valorile funcţiei $y = \arccos x$ se consideră numai între limitele dela 0 la π $(0 \leqslant y \leqslant \pi)$, iar între aceste limite toate valorile funcţiei $\sin y$ sunt pozitive.

Intrucât $\operatorname{tg} y = x$, avem $\cos^2 y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, fiindcă $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$;

prin urmare,

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XVII)}$$

4. Derivata lui arcctg x

Punem

$$y = \operatorname{arcctg} x;$$

atunci

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

Derivând ambele părți ale acestei egalități, obținem:

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1,$$

de unde $y' = -\sin^2 y$.

Intrucât $\operatorname{ctg} y = x$, avem $\sin^2 y = \dfrac{1}{1+x^2}$, fiindcă $\sin^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}$;

prin urmare,

$$y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XVIII)}$$

§ 72. Exemple

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

1. $y = \operatorname{arctg} 3x^2$.

Rezolvare.

$$y' = \frac{1}{1+9x^4} \cdot (3x^2)' \quad \text{[după formulele (XVII) și (XIX)]}$$

$$= \frac{6x}{1+9x^4}.$$

2. $y = \arcsin (3x - 4x^3)$.

Rezolvare.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} (3x - 4x^3)' \quad \text{[după formulele (XV) și XIX)]}$$

$$= \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{x+a}{1-ax}$.

Rezolvare.

$$y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+a}{1-ax}\right)' \text{ [după formulele (XVIII) și (XIX)]}$$

$$= -\frac{(1-ax)^2}{(1+a^2)(1+x)^2} \cdot \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Exerciții

La §§ 56 — 63

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

1. $y = 5x^3 - 3x^2 + 6$. R: $y' = 15x^2 - 6x$.
2. $y = x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 3{,}5x^2 - x$. R: $y' = 5x^4 - x^3 + 7x - 1$.
3. $y = x^{a+b}$. R: $y' = (a+b)x^{a+b-1}$.
4. $y = ax^2 + bx + c$. R: $y' = 2ax + b$.
5. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$. R: $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}$.
6. $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$. R: $y' = -\frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$.
7. $y = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$. R: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5\sqrt[3]{x^2}}$.
8. $y = 0{,}4\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{3}$. R: $y' = \frac{0{,}1}{\sqrt[4]{x^3}}$.
9. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$. R: $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}$.
10. $y = x^{-2} - 4x^{-\frac{1}{2}}$ R: $y' = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}}$.
11. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. R: $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.
12. $y = \frac{px^3}{\sqrt{x}} + \frac{q\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{r}{\sqrt[5]{x}}$. R: $y' = \frac{5p}{2}\sqrt{x^3} + \frac{q}{6\sqrt[6]{x^5}} + \frac{r}{5x\sqrt[5]{x}}$.
13. $y = t^{1,2} - \frac{3}{t^{1,5}}$. R: $y' = 1{,}2\,t^{0,2} + \frac{4{,}5}{t^{-2,5}}$.
14. $y = \frac{mz^2 + nz + 2p}{g + r}$. R: $y' = \frac{2mz + n}{g + r}$.
15. $y = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{3x}$. R: $y' = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

16. $s = \sqrt{t}(2t^3 - \sqrt{t} + 1)$. R: $s' = 7t^2\sqrt{t} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

17. $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Să se calculeze $f(1)$; $f''(1)$; $f(2)$; $f'(2)$; $f(3)$; $f'(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(a)$; $f'(a)$.

R: 2; −3; 0; −1; 0; 1; 3,75; −4; $a^2 - 5a + 6$; $2a - 5$.

18. $f(x) = x^5 - 3x^3 + 1$. Să se arate că $f'(a) = f'(-a)$.

19. Să se afle valorile x și y, pentru care derivatele următoarelor funcții se anulează:

a) $y = 2x^3 - 9x^2$,

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 18$,

c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}$,

d) $y = x^4 - 2x^3 + 4$.

R: a) (0, 0); (3, −27); b) (−2, 2); (1, −25); c) $\left(-2, -3\frac{3}{4}\right)$; $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; $\left(2, -3\frac{3}{4}\right)$; d) (0, 4); $\left(\frac{3}{2}, \frac{37}{16}\right)$.

20. Să se afle ecuațiile tangentei și normalei la curba $y = 4x^2 + 4x - 3$ în punctul de abscisă −1.

R: $4x + y + 7 = 0$; $x - 4y - 11 = 0$.

21. Să se afle ecuațiile tangentei și normalei la curba $y = 2 - 4x - x^2$ în punctul de abscisă −3.

R: $2x - y + 11 = 0$; $x + 2y - 7 = 0$.

22. Să se afle tangentele la curba $y = x^3 + x^2$, care au coeficienții unghiulari egali 8.

R: $8x - y + 12 = 0$; $216x - 27y - 176 = 0$.

23. Să se afle ecuațiile tangentelor la curba $y = 2x^3 + 4x^2 - x$, care au coeficienții unghiulari egali $\frac{1}{2}$.

R: $x - 2y + 6 = 0$; $27x - 54y - 7 = 0$.

24. Să se afle ecuațiile tangentelor la curba $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$, paralele cu dreapta $7x - 4y + 28 = 0$.

R: $7x - 4y - 17 = 0$; $189x - 108y - 209 = 0$.

25. Să se afle pe curba $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ punctele în care tangentele, duse la curbă, sunt paralele cu dreapta $3x - y - 7 = 0$.

R: (1, 5); $\left(-\frac{1}{3}, \frac{59}{27}\right)$.

26. Să se afle unghiul format de tangentele la curbă $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, duse în punctele care au abscisele -1 și 1.

R: $\operatorname{arctg} \frac{6}{7}$.

27. Să se afle aria triunghiului format de axele de coordonate și tangenta dusă la curba $y = x^3$ în punctul $(3, 27)$.

R: 54 unități pătrate.

28. Să se afle ecuația normalei la parabola $y = x^2 - 4x + 7$, care este perpendiculară pe dreapta ce unește originea cu vârful parabolei.

R: $6x + 9y - 38 = 0$.

29. Să se afle ecuația normalei la curba $y = +\sqrt{x} + 6$ în punctul de intersecție al curbei cu bisectoarea din primul cadran a axelor de coordonate.

R: $6x + y - 63 = 0$.

30. Spațiul s în metri, parcurs de un punct în t secunde, este dat de ecuația $s = 2t^3 - 3$. Să se determine viteza mișcării după: *a*) 1 secunde; *b*) 2 secunde dela începerea mișcării.

R: *a*) 6 m/s; *b*) 24 m/s.

31. Când se anulează viteza unui punct care se mișcă după legea $s = t^2 - 4t + 5$?

R: $t = 2$ secunde.

32. Înălțimea s în metri, atinsă în t secunde de un corp, aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0 m/s, este dată de formula:

$$s = v_0 t - 4{,}9t^2.$$

a) Să se afle viteza mișcării în orice moment t.

Presupunând $v_0 = 100$ m/s, să se determine:

b) viteza mișcării corpului la sfârșitul secundei a doua;

c) la sfârșitul secundei a 15-a;

d) după câte secunde corpul va atinge punctul cel mai înalt al traiectoriei?

R: *a*) $v = v_0 - 9{,}8t$; *b*) 80,4 m/s; *c*) -47 m/s; *d*) aproximativ 10,2 s.

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

33. $y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$. R: $y' = 6x^2 + 18x + 7$.

34. $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$. R: $y' = 4x(1 + 3x + 10x^3)$.

35. $y = (x^2 + 4x - 3)(3x^2 + 12x + 12)$. R: $y' = 6(x + 2)(2x^2 + 8x + 1)$.

36. $y = x(2x - 1)(3x + 2)$. R: $y' = 2(3x^2 + x - 1)$.

37. $s = (\sqrt{t} + 1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. R: $s' = \frac{1 + t}{2t\sqrt{t}}$.

38. $f(x) = (1 + x^2)\left(3 - \frac{1}{x^3}\right)$.

Să se afle $f'(1)$ și $f'(-1)$. R: 10; -2.

Să se afle derivatele următoarelor funcții :

39. $y = \dfrac{x+a}{x-a}$. R : $y' = -\dfrac{2a}{(x-a)^2}$.

40. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$. R : $y' = \dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$.

41. $y = \dfrac{x^3}{4-x}$. R : $y' = \dfrac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2}$.

42. $v = \dfrac{u^2+u-2}{u^3-1}$. R : $v' = -\dfrac{u^2+4u+1}{(u^2+u+1)^2}$.

43. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$. R : $y' = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$.

44. $s = \dfrac{1-\sqrt[3]{t^2}}{1+\sqrt[3]{t^2}}$. R : $s' = -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{t}\left(1+\sqrt[3]{t^2}\right)^2}$.

45. $f(x) = \dfrac{a-x}{a+x}$. Să se afle $f'(a)$. R : $-\dfrac{1}{2a}$.

46. Să se determine unghiul de înclinare față de axa Ox al tangentei, dusă în origine la curba $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

R : $\dfrac{\pi}{4}$.

Să se afle derivatele următoarelor funcții :

47. $y = (x^3-1)^{100}$. R : $y' = 200x^2(x^3-1)^{99}$.

48. $y = \sqrt{1+x^2}$. R : $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

49. $y = \sqrt[3]{1+x^2}$. R : $y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.

50. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ R : $y' = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

51. $y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$. R : $y' = \dfrac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

52. $y = (3x-1)^2(x-1)^3$. R : $y' = 3(5x-3)(3x-1)(x-1)^2$.

53. $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. R : $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

54. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. R : $y' = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}$.

Scanned with OKEN Scanner

55. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. R: $y' = \dfrac{a^2}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$.

56. $y = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. R: $y' = -\dfrac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

57. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$. R: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

58. $y = \dfrac{x}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$. R: $y' = \dfrac{2x^2+a^2}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} - \dfrac{2x}{a^2}$.

59. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{a^2+x^2}}$. R: $y' = -\dfrac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

La §§ 64 — 67

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

60. $y = \ln(x-2)$. R: $y' = \dfrac{1}{x-2}$.

61. $y = \ln(ax+b)$. R: $y' = \dfrac{a}{ax+b}$.

62. $y = \ln(x^2+2x)$. R: $y' = \dfrac{2(x+1)}{x^2+2x}$.

63. $y = \log_5(3x^2+1)$. R: $y' = \dfrac{6x\log_5 e}{3x^2+1}$.

64. $y = \log_a(x+x^3)$. R: $y' = \dfrac{1+3x^2}{x+x^3}\log_a e$.

65. $y = \log_3(x+\sqrt{x})$. R: $y' = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2(x\sqrt{x}+x)}\log_3 e$.

66. $y = \ln\ln x$. R: $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$.

67. $y = \ln(1+\ln x)$. R: $y' = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

68. $y = \ln x^2$. R: $y' = \dfrac{2}{x}$.

69. $y = \ln^2 x$. R: $y' = \dfrac{2\ln x}{x}$.

70. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$. R: $y' = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

71. $y = x\ln x$. R: $y' = \ln x + 1$.

72. $y = \ln \frac{a+x}{a-x}$. R: $y' = \frac{2a}{a^2-x^2}$.

73. $y = \ln(2x^2 - 4x + 3)$. R: $y' = \frac{4(x-1)}{2x^2-4x+3}$.

74. $y = \ln \sqrt{x^2 + 4x + 3}$. R: $y' = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$.

75. $s = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{3t - \sqrt{3}}{3t + \sqrt{3}}$. R: $s' = \frac{1}{3t^2 - 1}$.

76. $v = \ln \frac{1}{\sqrt{3 - 4u + u^2}}$. R: $v' = \frac{2-u}{3-4u+u^2}$.

77. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. R: $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

78. $y = \ln(3x + \sqrt{9x^2+2})$. R: $y' = \frac{3}{\sqrt{9x^2+2}}$.

79. $y = \frac{1}{3} \ln(x^3 + \sqrt{x^6 - a^6})$. R: $y' = \frac{x^2}{\sqrt{x^6-a^6}}$.

80. $s = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{a^2+t^2} - a}{t}$. R: $s' = \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}$.

81. $y = \ln \sqrt{x^2+4} + \frac{2}{x^2+4}$. R: $y' = \frac{x^3}{(x^2+4)^2}$.

82. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$. Să se afle $f'(e)$. R: $\frac{1}{3e}$.

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

83. $y = e^{4x-3}$. R: $y' = 4e^{4x-3}$.

84. $y = a^{3x}$. R: $y' = 3a^{3x} \ln a$.

85. $s = 7^{t^3+3t}$. R: $s' = 3(t^2+1)7^{t^3-3t} \ln 7$.

86. $p = \frac{1}{5^q}$. R: $p' = \frac{-\ln 5}{5^q}$.

87. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. R: $y' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$.

88. $y = 4^{1-\sqrt{x}}$. R: $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 4^{1-\sqrt{x}} \ln 4$.

89. $y = e^{e^x}$. R: $y' = e^x \cdot e^{e^x}$.

Scanned with OKEN Scanner

90. $y = 2x - a\ln(e^{\frac{x}{a}} + 1)$. R: $y' = \dfrac{e^{\frac{x}{a}} + 2}{e^{\frac{x}{a}} + 1}$.

91. $y = ax\,cx$ . . R: $y' = ax\,cx\,(1 + \ln a)$.

92. $y = \dfrac{a^{b+cx}\,e^{b+cx}}{c(1 + \ln a)}$. R: $y' = a^{b+cx}\,e^{b+cx}$.

93. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. R: $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

94. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. R: $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

95. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. R: $y' = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

La §§ 69, 70.

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

96. $y = \cos 5x$. R: $y' = -5\sin 5x$.

97. $y = \sin(3ax)$. R: $y' = 3a\cos(3ax)$.

98. $y = \cos\dfrac{a}{x}$. R: $y' = \dfrac{a}{x^2}\sin\dfrac{a}{x}$.

99. $y = \operatorname{tg}(2x + 3)$. R: $y' = \dfrac{2}{\cos^2(2x + 3)}$.

100. $y = \operatorname{tg} x - x$. R: $y' = \operatorname{tg}^2 x$.

101. $s = \sin\sqrt{1 - t^2}$. R: $s' = -\dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\cos\sqrt{1 - t^2}$.

102. $v = \cos\dfrac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}}$. R: $v' = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1 + \sqrt{u})^2}\sin\dfrac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}}$.

103. $y = \cos^3 x^2$. R: $y' = -6x\sin x^2\cos^2 x^2$.

104. $y = -\dfrac{3}{5}\operatorname{ctg}^5\dfrac{x}{3} + \operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{3} - 3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3} - x$. R: $y' = \operatorname{ctg}^6\dfrac{x}{3}$.

105. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$. R: $y' = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{1 + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}\cos^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$.

106. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$. R: $y' = \sec x$.

107. $y = \ln \cos x$. R: $y' = -\operatorname{tg} x$.

108. $y = \sin \ln x$. R: $y' = \dfrac{\cos \ln x}{x}$.

109. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. R: $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

110. $y = e^{\sin x}$. R: $y' = \cos x e^{\sin x}$.

111. $y = a^{\operatorname{tg} nx}$. R: $y' = \dfrac{n a^{\operatorname{tg} nx} \ln a}{\cos^2 nx}$.

112. $f(u) = \sin^2 u$. Să se afle $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. R: 1.

113. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$. Să se afle $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f'(0)$. R: 2; 0.

114. Sub ce unghiuri intersectează axa Ox tangenta la sinusoidă în punctele $x = 0$, $x = \pi$? În care puncte de pe segmentul $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$ tangenta la sinusoidă este paralelă cu axa Ox?

R: $\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}$.

La §§ 71, 72.

Să se afle derivatele următoarelor funcții:

115. $y = \arcsin \dfrac{x}{a}$. R: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

116. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$. R: $y' = \dfrac{2}{1+x^2}$.

117. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 2x}$. R: $y' = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

118. $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. R: $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

119. $y = \arccos \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$. R: $y' = -\dfrac{2a}{x^2 + a^2}$.

120. $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. R: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

121. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. R: $y' = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.

122. $y = \arccos \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. R: $y' = -\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.

123. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - x$. R: $y' = -\dfrac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

124. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \dfrac{x}{a}$. R: $y' = 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

125. $y = x \arcsin \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}$. R: $y' = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

CAPITOLUL VII

STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

§ 73. Mersul variației unei funcții

Fie dată o funcție oarecare $y = f(x)$. Cum știm, funcția este reprezentată grafic printr'o linie curbă. Această curbă arată în mod intuitiv mersul variației funcției, care depinde de variația argumentului.

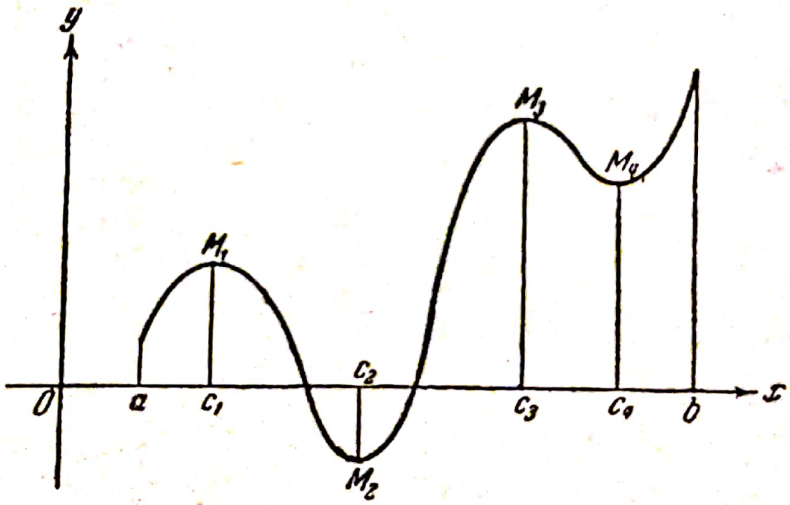

Fig. 78.

Să admitem că fig. 78 reprezintă graficul funcției date $y = f(x)$. Vedem că în unele porțiuni curba se înalță, în altele se lasă în jos (urmărind direcția spre abscisele crescătoare). Porțiunile de ridicare și coborîre ale curbei corespund intervalelor de creștere și descreștere ale funcției. Astfel, fig. 78 arată în mod intuitiv că în intervalele (a, c_1), (c_2, c_3), (c_4, b) funcția crește, iar în intervalele (c_1, c_2), (c_3, c_4), descrește. In punctele M_1 și M_3 curba are înălțimea cea mai mare în comparație cu porțiunile de curbă apropiate de aceste puncte, iar în punctele M_2,

M_4 curba coboară cel mai jos în comparaţie cu porţiunile apropiate de punctele M_2, M_4. Punctele cele mai ridicate şi punctele unde curba coboară cel mai jos corespund valorilor c_1, c_3, c_2, c_4 ale argumentului x din funcţia $y = f(x)$. Pentru aceste valori date lui x, funcţia atinge cele mai mari şi cele mai mici valori în comparaţie cu valorile corespunzătoare date argumentului x în apropierea valorilor c_1, c_3, c_2, c_4.

Creşterea şi descreşterea funcţiei, valorile cele mai mari şi cele mai mici atinse de funcţie în punctele interioare ale porţiunii, unde ea este determinată, constitue elementele care caracterizează mersul variaţiei funcţiei. In acest capitol vom studia problema, cum se pot determina pentru o funcţie dată particularităţile indicate de mersul variaţiei ei. Vom vedea că această problemă se rezolvă cu ajutorul noţiunii de derivată.

§ 74. Creşterea şi descreşterea funcţiei într'un interval

D e f i n i ţ i e. Dacă în intervalul variaţiei argumentului x dela valoarea a la valoarea b, funcţia $y = f(x)$ creşte odată cu creşterea lui x, atunci funcţia se numeşte *crescătoare* în acel interval.

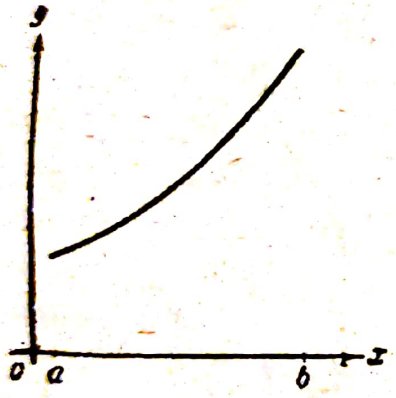

Fig. 79.

In mod analog, dacă în intervalul dela a la b, odată cu creşterea lui x, funcţia $y = f(x)$ descreşte, atunci ea se numeşte *descrescătoare* în acel interval.

Din definiţie rezultă că graficul unei funcţii crescătoare în intervalul (a, b) se reprezintă printr'o curbă care se ridică în direcţia absciselor crescătoare (fig. 79).

Graficul unei funcţii descrescătoare în intervalul (a, b) reprezintă o curbă care coboară în direcţia absciselor crescătoare (fig. 80).

In cercetarea mersului variaţiei funcţiei trebue să aflăm intervalele, în care funcţia creşte şi cele în care ea descreşte. Pentru aceasta, urmează să stabilim *criteriul analitic* care să ne permită rezolvarea acestei probleme pentru o funcţie dată $y = f(x)$. Acest criteriu se formulează sub forma teoremei următoare :

T e o r e m ă. (Criteriul suficient pentru creşterea funcţiei.) *Dacă derivata unei funcţii date este pozitivă pentru toate valorile x ale intervalului dat (a, b), atunci funcţia creşte în acest interval* *).

*) In felul acesta ne mărginim, cu ocazia studiului acestei probleme, numai la funcţiile care au derivată în fiecare punct al intervalului.

Scanned with OKEN Scanner

Valabilitatea teoremei rezultă din considerente geometrice. Să amintim că derivata este coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției, sau, exprimat altfel, înclinarea graficului funcției. Deaceea, în cazul când derivata este pozitivă, tangenta formează unghiuri ascuțite cu axa Ox și rămâne cuprinsă în intervalul (a, b), înclinată în sus: împreună cu ea este ascendentă și curba (fig. 81).

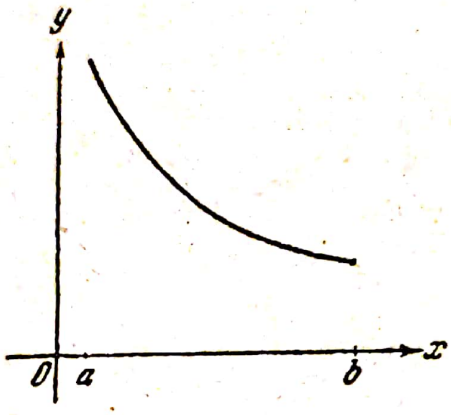

Fig. 80.

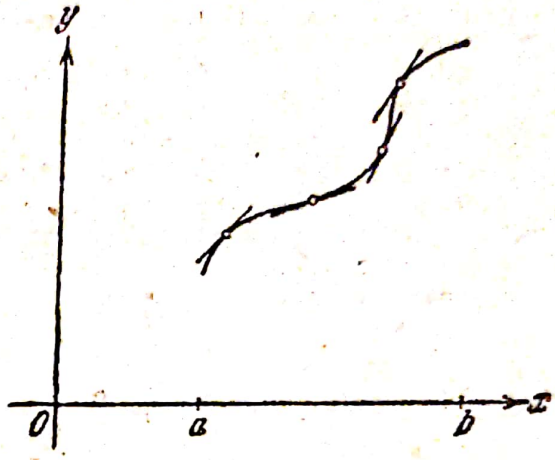

Fig. 81.

T e o r e m ă. (Criteriul suficient pentru descreșterea funcției.) *Dacă derivata funcției date este negativă pentru toate valorile x din intervalul dat (a, b), funcția descrește în acest interval.*

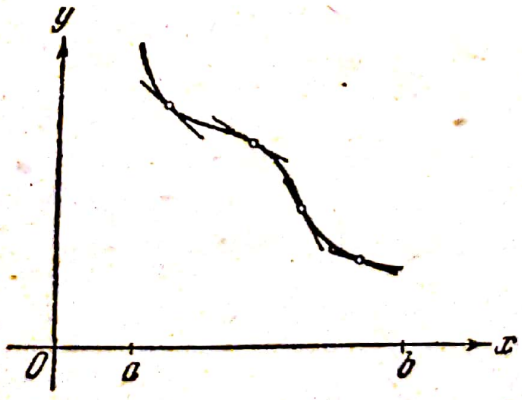

Fig. 82.

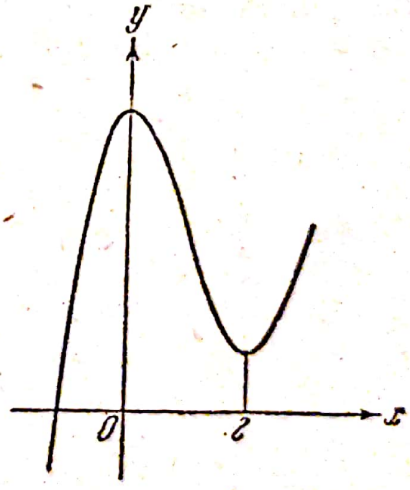

Fig. 83.

Dacă derivata are semnul minus în intervalul (a, b), atunci tangenta la graficul funcției, formând unghiuri obtuze cu axa Ox, rămâne înclinată în jos, și odată cu tangenta, însăși curba merge în jos (fig. 82).

Exemplu. Să se determine intervalele de creştere şi descreştere ale funcţiei : $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

Rezolvare. Aflăm derivata funcţiei date :

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Acum trebue să determinăm, pentru care valori ale argumentului x derivata este pozitivă şi pentru care negativă. Pentru a rezolva mai simplu problema pusă, să descompunem în factori polinomul $3x^2 - 6x$:

$$y' = 3x(x-2).$$

Din derivata scrisă sub această formă constatăm uşor că produsul $3x(x-2)$ este pozitiv pentru toate valorile $x < 0$, întrucât x şi diferenţa $x-2$ vor avea atunci acelaşi semn. Pentru x pozitiv, însă mai mic decât doi, derivata este negativă şi pentru $x > 2$ ea devine din nou pozitivă. Prin urmare, funcţia creşte în intervalul dela $-\infty$ la 0, descreşte în intervalul dela 0 la 2 şi creşte în intervalul dela 2 la $+\infty$. In fig. 83 este reprezentat graficul funcţiei date.

§ 75. Maximele şi minimele *) unei funcţii. Aflarea extremelor unei funcţii

1. Am rezolvat în paragraful precedent problema determinării intervalelor de creştere şi descreştere ale unei funcţii. Să trecem acum la problema aflării punctelor (adică a argumentului x), în care funcţia $f(x)$ atinge valorile cele mai mari şi cele mai mici *în comparaţie cu valorile ei în punctele cele mai apropiate* (v. § 73).

Definiţie. *Funcţia* $f(x)$ *are un maximum în punctul* $x = c$, *dacă valoarea ei* $f(c)$ *în acest punct este mai mare decât toate valorile ei în punctele cele mai apropiate, adică atunci când este satisfăcută inegalitatea*

$$f(c) > f(x)$$

pentru toţi x, *suficient de apropiaţi de* c.

Funcţia $f(x)$ *are un minimum în punctul* $x = c$, *dacă valoarea ei în acest punct,* $f(c)$ *este mai mică decât toate valorile ei în punctele cele mai apropiate, adică atunci când este satisfăcută inegalitatea*

$$f(c) < f(x)$$

pentru toţi x, *suficient de apropiaţi de* c.

Fig. 78 ne dă o reprezentare intuitivă a definiţiilor date anterior. Este clar, de exemplu, că în punctul c_1 funcţia, al cărei grafic este reprezentat în figură, are un maximum : pentru toate valorile $x \neq c_1$ cuprinse

*) Pe latineşte maximum şi minimum înseamnă respectiv „cel mai mare" şi „cel mai mic".

în intervalul (a, c_2) este satisfăcută inegalitatea $f(c_1) > f(x)$. In punctul c_3 funcţia are deasemenea un maximum, iar în punctele c_2 şi c_4, minime.

Trebue să atragem atenţia că valorile funcţiei, în punctele în care funcţia are un maximum sau un minimum, nu sunt neapărat valorile cele mai mari şi cele mai mici ale funcţiei. Aceeaşi fig. 78 arată că funcţia considerată pe segmentul $[a, b]$ atinge valoarea cea mai mare, nu în punctul de maximum, ci pentru $x = b$, adică la capătul segmentului $[a, b]$. Chiar mai mult : în punctul $x = c_4$ funcţia are un minimum, şi totuşi valoarea $f(c_4)$ a funcţiei în acest punct este mai mare decât maximum $f(c_1)$. Deaceea, maximul şi minimul funcţiei date în definiţiile precedente se numesc mai precis *maximul relativ* şi *minimul relativ* : în punctele de maximum şi de minimum funcţia are valoarea cea mai mare şi cea mai mică, numai în comparaţie cu valorile ei *„învecinate"*.

Pentru maximele şi minimele unei funcţii există termenul de *„extremum"*, care cuprinde amândouă aceste denumiri *).

2. Să stabilim acum o regulă care să ne permită să aflăm extremele unei funcţii.

Vom cerceta funcţia $y = f(x)$, continuă în intervalul (a, b) şi având o derivată $f'(x)$ continuă în acest interval.

Să presupunem că derivata $f'(x)$ nu se anulează în intervalul (a, b) pentru nicio valoare x. Atunci ea trebue se păstreze acelaşi semn în tot intervalul. In adevăr, dacă, de exemplu, pentru $x = x_1$, derivata este pozitivă, iar pentru $x = x_2$, negativă, atunci, fiind continuă, ea trebue să se anuleze, cel puţin pentru o singură valoare $x = x_0$, cuprinsă între x_1 şi x_2 (v. teorema 2 § 49). Insă aceasta nu poate să fie aşa, întrucât x_0 se află în interiorul intervalului (a, b) şi noi am presupus că derivata nu se anulează în tot intervalul (a, b). Iar dacă derivata $f'(x)$ păstrează semnul neschimbat, atunci funcţia $y = f(x)$, ori creşte tot timpul în intervalul (a, b), ori descreşte mereu (v. § 74) şi deaceea nu are niciun extremum.

Prin urmare, dacă funcţia $f(x)$ are extreme în intervalul (a, b), atunci acestea pot fi numai în acele puncte, în care derivata $f'(x)$ se anulează.

Să presupunem acum că $f'(x)$ se anulează în intervalul (a, b), însă numai într'un număr *finit* de puncte, de exemplu, în punctele $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_k$. Atunci în fiecare din intervalele (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_k, b), derivata $f'(x)$, conform celor demonstrate, păstrează semnul neschimbat. Să luăm unul din punctele $c_1, c_2, \ldots, c_k$, de exemplu c_1.

---

*) Pe latineşte extremum înseamnă „cel mai de margine".

Să admitem că în intervalul (a, c_1) derivata $f'(x)$ este pozitivă, iar în intervalul (c_1, c_2), negativă. Atunci funcţia va creşte în primul interval şi va descreşte în al doilea ; prin urmare, pentru $x = c_1$ funcţia va avea valoarea cea mai mare în comparaţie cu valorile din intervalele (a, c_1) şi (c_1, c_2), adică în punctul $x = c_1$ funcţia $f(x)$ va avea un maximum. Invers, dacă în intervalul (a, c_1) derivata $f'(x)$ este negativă şi în intervalul (c_1, c_2), pozitivă, atunci funcţia descreşte în primul interval şi creşte în al doilea şi are, prin urmare, în punctul $x = c_1$ un minimum. Să presupunem, însfârşit, că $f'(x)$ are acelaşi semn în intervalele (a, c_1) şi (c_1, c_2), de exemplu, semnul (+). Atunci amândouă intervalele sunt intervale de creştere ale funcţiei $f(x)$, adică în tot intervalul (a, c_2) funcţia $f(x)$ creşte şi, prin urmare, nu are nici maximum, nici minimum pentru $x = c_1$. Este evident că, atunci când $f'(x)$ are semnul (—) în fiecare din intervalele (a, c_1) şi (c_1, c_2), funcţia $f(x)$ nu are nici ea extreme pentru $x = c_1$.

Acelaşi raţionament ne permite să rezolvăm problema care ne interesează, despre extremele funcţiei în toate celelalte puncte :

$$c_2, c_3, \ldots, c_k.$$

Rezultatele obţinute se explică foarte simplu şi din punct de vedere geometric.

Punctelor extreme ale funcţiei $f(x)$ le corespund „vârfuri" ale curbei, reprezentând graficul funcţiei. Este evident că la vârfuri tangenta la curbă este paralelă cu axa Ox (punctele M_2 şi M_3 din fig. 84).

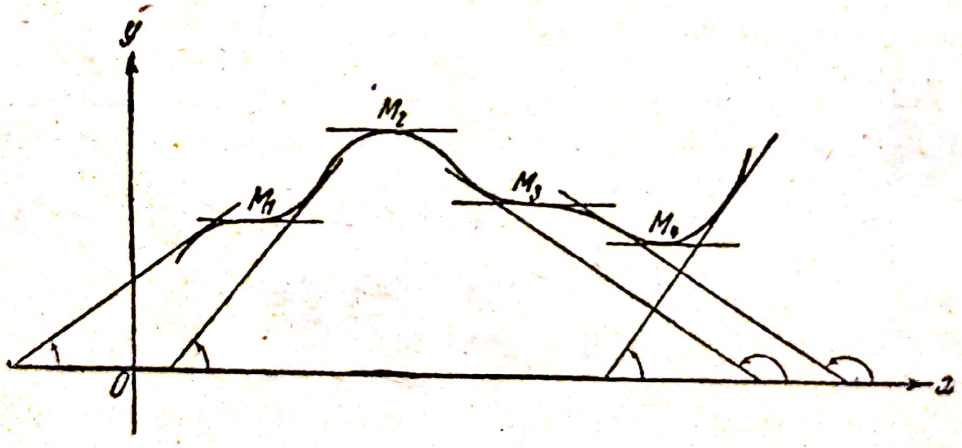

Fig. 84.

Deaceea, ţinând seama de mersul geometric al derivatei, $f'(x) = 0$, în punctele unde funcţia are extreme.

Invers, dacă $f'(x)$ se anulează pentru o valoare oarecare x, atunci tangenta în punctul corespunzător al curbei este paralelă cu axa Ox. Totuşi, dacă, trecând prin această valoare a lui x, derivata nu-şi schimbă

semnul, atunci unghiul de înclinare al tangentei, la stânga şi la dreapta punctului curbei, rămâne fie obtuz, fie ascuţit, iar tangenta rămâne înclinată în sus sau în jos. Deci şi curba, ori se ridică mereu, ori coboară, şi punctul, în care tangenta este paralelă cu axa Ox, nu este un vârf al curbei, ci un *punct de inflexiune* (punctele M_1 şi M_3 ale curbei din fig. 84). Prin urmare, funcţia nu are *extremum* în acest caz. Dacă însă semnul derivatei se schimbă la trecerea prin valoarea indicată x, atunci curba trece dela ridicare la coborîre sau dela coborîre la ridicare, şi punctul curbei, în care tangenta este paralelă cu axa Ox, este un vârf (punctele M_2 şi M_4 din fig. 84). Prin urmare, funcţia are *extremum* în cazul acesta.

3. Raţionamentul expus mai sus duce la regula următoare pentru aflarea acelor valori x din interiorul intervalului (a, b), pentru care funcţia $f(x)$ are extreme.

Pentru aflarea valorilor x, pentru care funcţia $f(x)$ are extreme, trebue :

1) *să calculăm derivata* $f'(x)$;

2) *să aflăm acele valori* x *din interiorul intervalului* (a, b), *pentru care* $f'(x)$ *se anulează ; fie* $c_1, c_2, \ldots, c_k$, *aceste valori ;*

3) *să determinăm semnul derivatei din fiecare din intervalele* (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_k, b). *Prin aceasta vom răspunde şi la întrebarea, dacă derivata îşi schimbă semnul la trecerea prin fiecare din punctele* c_1, c_2, ..., c_k *sau nu ; şi dacă semnul se schimbă, atunci determinăm şi care semne : din* (+) *în* (—) *sau din* (—) *în* (+). *Schimbarea semnului derivatei din* (+) *în* (—) *arată că pentru valoarea corespunzătoare* x, *funcţia are un maximum. Dacă semnul derivatei nu se schimbă, funcţia nu are un extremum în punctul respectiv.*

Observăm cu această ocazie că, întrucât în fiecare interval parţial derivata păstrează semnul neschimbat, este suficient să stabilim semnul derivatei pentru o valoare oarecare x, cuprinsă în intervalul dat, pentru a determina astfel, semnul derivatei în tot intervalul parţial.

Să lămurim prin exemple cele spuse.

Exemplul 1. Să se afle valorile argumentului pentru care funcţia :

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 21$$

are extreme.

Rezolvare. 1) Aflăm derivata funcţiei date :

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

2) Să căutăm acele valori x, pentru care derivata se anulează. Egalând în acest scop derivata cu zero, rezolvăm ecuaţia :

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt : — 1 şi 2.

Pentru continuarea problemei este util să descompunem derivata în factori :

$$y' = 6(x+1)(x-2).$$

3) Studiem funcţia în intervalul $(-\infty, +\infty)$. Valorile argumentului -1 şi 2, pentru care derivata se anulează, împart întreg intervalul $(-\infty, +\infty)$ în părţile :

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, +\infty).$$

Determinând semnele factorilor $(x+1)$ şi $(x-2)$ pentru valorile $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, aflăm semnul derivatei corespunzător fiecăruia din cele trei intervale parţiale :

în intervalul $(-\infty, -1)$ $\quad y' = (-)\cdot(-) = +$,
în intervalul $(-1, 2)$ $\quad y' = (+)\cdot(-) = -$,
în intervalul $(2, +\infty)$ $\quad y' = (+)\cdot(+) = +$.

Vedem de aici că la trecerea prin punctul $x = -1$ derivata îşi schimbă semnul din $(+)$ în $(-)$, la trecerea prin punctul $x = 2$, semnul din $(-)$ în $(+)$. Prin urmare, funcţia are un maximum în punctul $x = -1$ şi un minimum în punctul $x = 2$.

Exemplul 2. Să se cerceteze funcţia :

$$y = x^3$$

în privinţa maximelor şi minimelor.

Rezolvare. 1) $y' = 3x^2$.
2) $3x^2 = 0$,

de unde $x = 0$.

3) Atât pentru $x<0$, cât şi pentru $x>0$, derivata rămâne pozitivă. Aceasta înseamnă că la trecerea prin punctul $x = 0$ derivata nu-şi schimbă semnul. Rezultă de aici că pentru $x = 0$ funcţia nu are un extremum. Graficul funcţiei $y = x^3$ (fig. 85) dă o reprezentare intuitivă a rezultatului obţinut.

Exemplul 3. Intensitatea I a curentului într'un circuit (reprezentat în fig. 86) se determină, conform legii lui Ohm, prin expresia :

$$I = \frac{E}{R+r},$$

unde r este rezistenţa exterioară şi R cea interioară. Puterea repartizată sarcinii R se exprimă prin formula :

$$P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2},$$

Să se afle valoarea lui R, pentru care puterea va fi maximă.

Rezolvare. Aici trebue cercetate maximele şi minimele lui P funcţie de variabila independentă R.

Urmând regula stabilită, aflăm :

$$1)\ P' = E^2 \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = E^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

2) $r - R = 0$, de unde $R = r$.

3) Pentru $R < r$, derivata $P' > 0$. Pentru $R > r$ derivata $P' < 0$.

Prin urmare, pentru $R = r$, adică atunci când rezistența exteriocară este egală cu cea interioară, puterea P va fi cea mai mare.

4. In problemele care se întâlnesc în practică, deobicei funcția nu se dă printr'o ecuație gata. În astfel de cazuri, din enunțul problemei trebue să rezulte ecuația care leagă funcția de acea variabilă, de care depinde valoarea cea mai mare sau cea mai mică a funcției.

Adeseori se poate constata chiar după felul problemei, care valori ale argumentului care anulează derivata dau un maximum și care dau un minimum al funcției. Aceasta ne dispensează de obligația de a determina semnele derivatei la stânga și la dreapta valorilor aflate pentru variabila independentă.

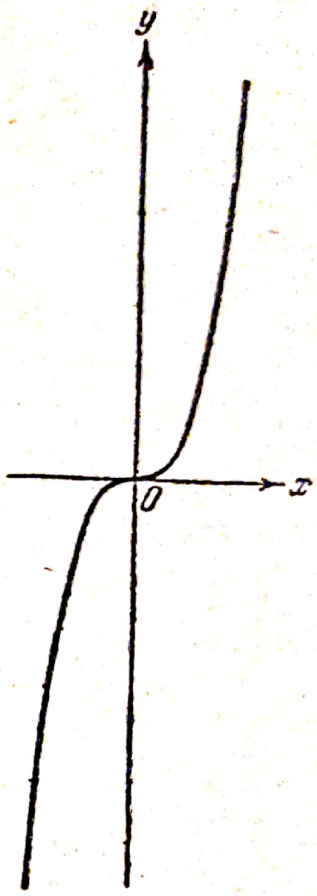

Fig. 85.

Problema 1. Dintr'o bucată de carton pătrată, cu latura a, urmează să se facă o cutie fără capac, tăindu-se pătratele la colțuri și îndoind apoi marginile scurtate (fig. 87), astfel încât cutia să aibă volumul maxim. Să se determine lungimea laturii pătrățelelor, care trebue tăiate.

Rezolvare. Să însemnăm cu x lungimea laturii unui pătrățel care trebue tăiat. Atunci lungimea fundului cutiei va fi egală cu $a - 2x$ și volumul ei $V = (a-2x)^2 x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$.

Trebue să aflăm valoarea x pentru care funcția V atinge maximum. Deci trebue să cercetăm maximele și minimele funcției V, stabilite de noi:

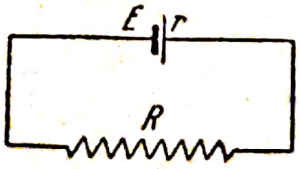

Fig. 86.

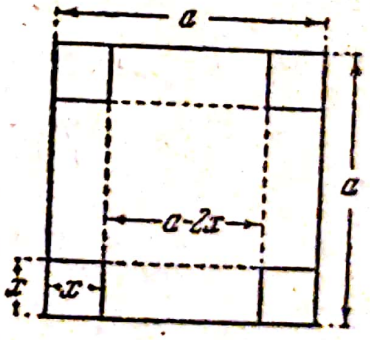

Fig. 87.

1) $V' = a^2 - 8ax + 12x^2$.

2) $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$, de unde aflăm:

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ și } x_2 = \frac{a}{6}.$$

Fără a cerceta mai departe, observăm că vom avea minimum pentru $x = \frac{a}{6}$ fiindcă, atunci când tăiem pătrățele cu latura $\frac{a}{2}$, nu mai rămâne nimic din bucata de carton și volumul cutiei este egal cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, lungimea laturii pătrățelelor tăiate trebue să fie egală cu a șasea parte din lungimea laturii bucății de carton date.

$$\text{Pentru } x = \frac{a}{6} \text{ volumul } V = \frac{2a^3}{27}.$$

P r o b l e m a 2. Rezistența unei grinzi dreptunghiulare este proporțională cu produsul dintre latura grinzii și patratul înălțimii sale. Să se afle dimensiunile grinzii cu cea mai mare rezistență, care poate fi tăiată dintr'un buștean cilindric cu un diametru de a cm.

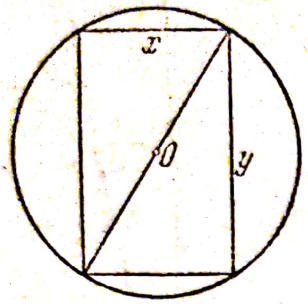

Fig. 88.

Rezolvare. In fig. 88 se arată secțiunea bușteanului și a grinzii. Să însemnăm cu x lățimea și cu y înălțimea grinzii. Atunci vom avea :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Rezistența grinzii se definește prin relația :

$$S = kxy^2 = kx(a^2 - x^2) = ka^2x - kx^3,$$

unde k este un coeficient de proporționalitate.

Astfel am stabilit funcția pe care trebue să o cercetăm în privința maximelor și minimelor.

1) $S' = k(a^2 - 3x^2)$.

2) $k(a^2 - 3x^2) = 0$, de unde $x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ și $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Putem să nu ținem seama de rădăcina a doua, fiindcă o soluție negativă nu are niciun sens pentru problema noastră.

Intrucât rezistența grinzii nu poate fi nemărginită, ea trebue să aibă un maximum. Prin urmare, rădăcina $x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ dă valoarea, pentru care funcția S atinge un maximum.

Pentru $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ cm, înălțimea este $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. Acestea sunt dimensiunile grinzii celei mai rezistente.

P r o b l e m a 3. Să se afle înălțimea conului de volum maxim, care poate fi înscris într'o sferă de rază r.

Rezolvare. Să însemnăm cu x raza bazei conului și cu y înălțimea lui (fig. 89). Atunci volumul V al conului va fi egal cu :

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Din fig. 89 avem : $x^2 = BC \cdot CD = y(2r - y)$. Deaceea funcția V se exprimă prin variabila y în felul următor :

$$V = \frac{\pi}{3} y^2(2r - y).$$

Cercetând maximele şi minimele acestei funcţii, aflăm că înălţimea căutată este de $y = \frac{4}{3} r$.

5. Observăm că am cercetat problema extremelor numai pentru funcţii care satisfac următoarele condiţii :

1) în intervalul considerat funcţia are o derivată continuă *) ;

2) în acest interval derivata se poate anula într'un număr infinit de puncte.

Tocmai cu astfel de funcţii ne întâlnim mai des în practică.

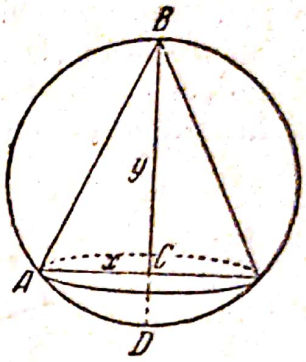

Fig. 89.

6. Vom arăta acum, pentru o mai bună lămurire a problemei, că o funcţie $f(x)$ continuă în intervalul considerat poate avea un extremum şi într'un punct în care nu există derivata $f'(x)$.

Exemplul unei astfel de funcţii îl dă funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Nu este greu să ne convingem că în punctul $x=0$ această funcţie are un minimum şi totodată derivata $f'(x)$ nu există în acest punct. In adevăr $f(0) = 0$, iar $\sqrt[3]{x^2}$ este o mărime pozitivă, pentru $x \neq 0$, atât pentru $x < 0$, cât şi pentru $x > 0$.

Prin urmare, $f(0) < f(x)$ pentru valorile $x \neq 0$. Aceasta înseamnă că în punctul $x = 0$ funcţia are un minimum. Pe de altă parte, $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, de unde vedem că pentru $x=0$ derivata $f'(x)$ nu există : expresia $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ pierde orice sens pentru $x = 0$. Când $x \to 0$, atunci $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \to \infty$. Aceasta înseamnă că curba care reprezintă graficul funcţiei date are în punctul 0 o tangentă verticală **).

---

*) In virtutea teoremei expuse în § 55 şi funcţia însăşi este continuă în intervalul dat.

**) Mai precis: $\lim_{x \to 0} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$, dacă x rămâne pozitiv şi $\lim_{x \to 0} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty$ pentru $x < 0$. Totuşi în ambele cazuri unghiul de înclinare al tangentei faţă de axa Ox tinde către $\frac{\pi}{2}$: în primul caz, din partea primului cadran ; în cazul al doilea, din partea cadranului al doilea al cercului trigonometric. Prin urmare în punctul (0, 0) curba are o tangentă unică, verticală.

Graficul funcţiei $y = \sqrt[3]{x^2}$ este arătat în fig. 90.

La deducerea regulii pentru aflarea valorii argumentului x, pentru care funcţia $f(x)$ are extreme, am presupus că derivata $f'(x)$ este continuă în intervalul considerat (a, b) şi se poate anula într'un număr finit de puncte. Nu este greu de văzut că raţionamentul, expus la pct. 2, nu se schimbă deloc nici într'un caz mai general, şi anume în cazul când: (1) funcţia $f(x)$, continuă în intervalul (a, b), are derivata $f'(x)$, care se anulează într'un număr finit de puncte sau nu există; (2) în afară de punctele unde derivata nu există, ea este peste tot continuă.

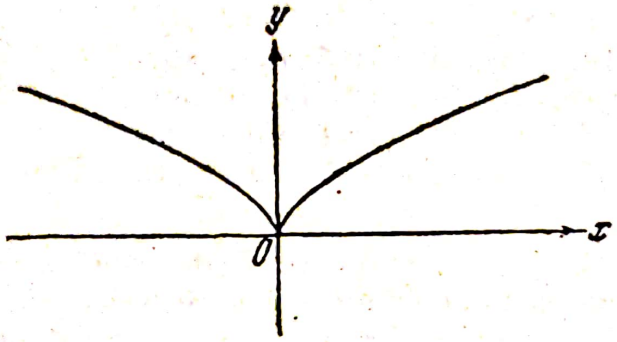

Fig. 90.

Astfel, în acest caz mai general, din derivata calculată trebue să se afle nu numai acele valori x, pentru care derivata se anulează, ci şi valorile pentru care ea nu există. Apoi fiecare valoare x aflată trebue să fie analizată în privinţa schimbării semnului derivatei.

Derivata $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ a funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ îşi schimbă semnul din $(-)$ în $(+)$ la trecerea prin punctul 0. Şi vedem că pentru $x = 0$ funcţia are un minimum.

Să cercetăm noua funcţie $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$. Să calculăm derivata ei: $\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Cum vedem, derivata $\varphi'(x)$ nu există pentru $x = 0$. Insă trecând prin valoarea $x = 0$ ea rămâne pozitivă: atât pentru $x < 0$, cât şi pentru $x > 0$. In virtutea regulii pentru aflarea extremelor, tragem concluzia că pentru $x = 0$ funcţia nu are nici maximum, nici minimum. Aceasta se confirmă şi prin cercetarea directă a funcţiei $\varphi(x)$: valoarea $\varphi(0) = 0$ nu este nici cea mai mare, nici cea mai mică în comparaţie cu valorile învecinate, fiindcă diferenţa $\varphi(0) - \varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ este o mărime negativă pentru $x < 0$ şi pozitivă pentru $x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\lim_{x \to 0} \varphi'(x) \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$, graficul funcţiei $y = \sqrt[3]{x}$ are în punctul (0, 0) o tangentă verticală (fig. 91).

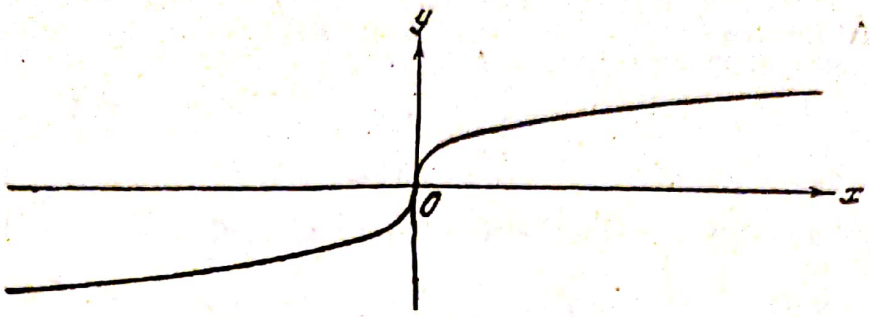

Fig. 91.

Observaţie. In § 55 am arătat că o funcţie, continuă într'un punct dat, poate să nu aibă derivată în acel punct. Funcţiile analizate acum sunt exemple pentru acest fapt.

§ 76. Derivata de ordinul doi. Interpretarea mecanică a derivatei a doua

1. In cazul când un punct reprezintă o valoare a argumentului, pentru care *derivata se anulează*, atunci existenţa unui extremum în acest punct şi determinarea tipului (maximum sau minimum) pot fi *uneori* rezolvate prin altă metodă decât prin cercetarea schimbării semnului derivatei la trecerea prin acest punct. Această metodă nouă reclamă introducerea unei noţiuni noi, a noţiunii derivatei de ordinul doi.

Să presupunem că funcţia $y = f(x)$ are derivata $y' = f'(x)$. Această derivată este, la rândul ei, o funcţie a argumentului x şi, prin urmare, poate avea deasemenea o derivată. Derivata „primei derivate" $y' = f'(x)$ se numeşte *derivata de ordinul doi* sau simplu *derivata a doua* a funcţiei date $y = f(x)$ şi se notează cu simbolul :

$$y'' \text{ sau } f''(x).$$

Se poate întâmpla să existe derivata derivatei a doua. In raport cu funcţia dată $y = f(x)$, aceasta va fi *derivata de ordinul trei* sau, mai scurt, *derivata a treia* $[y''' = f'''(x)]$, etc.

Exemplul 1. Să se afle derivata a doua a funcţiei $y = e^{ax}$.

Rezolvare.

$$y' = ae^{ax}; \quad y'' = a^2e^{ax}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Să presupunem că un punct material se mișcă în linie dreaptă și că legea mișcării lui este dată de funcția $s = f(t)$. Precum știm (§ 52), viteza mișcării punctului v, în momentul t se definește ca derivata spațiului s după timpul t;

$$v = s' = f(t).$$

In mecanică se definește *accelerația medie* (j_m) a punctului în intervalul de timp Δt (pentru o valoare determinată t) raportul dintre creșterea vitezei Δv și intervalul de timp corespunzător Δt:

$$j_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Limita acestui raport dă *accelerația* j a punctului în momentul t:

$$j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

După definiția derivatei $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = v'$. Și, cum $v = s' = f'(t)$, avem $v' = s'' = f''(t)$. Deci, $j = s'' = f''(t)$: *accelerația unui punct care se mișcă în linie dreaptă se definește ca derivata a doua a spațiului s în raport cu timpul t.*

Exemplul 2. Un punct se mișcă în linie dreaptă și parcurge în t secunde spațiul s (în metri), definit de formula:

$$s = 4t^3 + 2t^2 + 3t.$$

Să se afle mărimea accelerației: *a*) la începutul mișcării (pentru $t = 0$); *b*) la sfârșitul secundei a 5-a.

Rezolvare. Accelerația este derivata a doua a spațiului s după timpul t. Derivând de două ori funcția s în raport cu t, obținem:

$$s' = 12t^2 + 4t + 3,$$

$$s'' = j = 24t + 4.$$

Am aflat mărimea accelerației pentru orice moment t. Inlocuind în formula obținută valorile $t = 0$ și $t = 5$, aflăm:

$$a)\ j_{t=0} = 4 \text{ m/s}^2;\ b = j_{t=5} = 124 \text{ m/s}^2.$$

§ 77. A doua regulă pentru aflarea extremelor unei funcții

Să presupunem că în punctul $x = c$ prima derivată a unei funcții date $f(x)$ este egală cu zero $[f'(c) = 0]$. Să mai presupunem că funcția $f(x)$ are în punctul c derivata a doua, care este în acest punct continuă și pozitivă $[f''(c) > 0]$.

Datorită faptului că, potrivit premisei, $f''(x)$ este continuă în punctul $x = c$, o modificare neînsemnată a argumentului $x = c$ va atrage după sine o modificare neînsemnată și a derivatei a doua. Deaceea

Scanned with OKEN Scanner

într'un interval oarecare în jurul punctului $x = c$, $f''(x)$ va păstra același semn pe care îl are pentru $x = c$, adică $f''(x)$ va fi în acest interval o mărime pozitivă.

Dacă, într'un interval dat, derivata unei funcții oarecare este pozitivă, atunci știm că funcția crește în acest interval (§ 74). Derivata a doua $f''(x)$ este derivata primei derivate $f'(x)$. Prin urmare, semnul pozitiv al derivatei a doua arată că, într'un interval oarecare în jurul punctului c, prima derivată $f'(x)$ crește, atât la stânga, cât și la dreapta punctului c.

Cum $f'(c) = 0$, derivata $f'(x)$ trebue să fie pe o anumită porțiune la stânga lui $x = c$ o mărime negativă și pe o porțiune la dreapta punctului c, o mărime pozitivă.

Astfel, dacă $f''(c) > 0$ (și continuă în punctul c), atunci derivata întâi $f'(x)$ își schimbă semnul din ($-$) în ($+$) când trece prin valoarea $x = c$. Prin urmare, în punctul $x = c$ funcția $f(x)$ are un minimum (v. § 75, pct. 2).

Tot astfel se poate arăta că dacă $f''(c) < 0$, atunci funcția are un maximum în punctul $x = c$.

Metoda indicată pentru aflarea extremelor unei funcții nu este aplicabilă dacă în punctul în care $f'(x) = 0$, se anulează și $f''(x)$. Într'un asemenea caz trebue să ne folosim de regula fundamentală expusă în § 75.

Să arătăm rezultatele obținute, sub forma schemei următoare:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
c	0	$-$	maximum
		$+$	minimum
		0	regula nu este aplicabilă

Exemplul 1. Să se cerceteze maximele și minimele funcției:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Rezolvare.

1) Calculăm derivata întâi:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

sau

$$y' = 4x(x + 1)(x - 1).$$

2) Aflăm rădăcinile derivatei întâi, adică valorile x, pentru care y' se anulează : $x = 0$, $x = -1$, $x = +1$.

3) Calculăm derivata a doua :

$$y'' = 12x^2 - 4.$$

4) Înlocuind rădăcinile aflate ale derivatei întâi în expresia care definește derivata a doua, obținem :

pentru	$x = 0$	$y'' = -$;
pentru	$x = -1$	$y'' = +$;
pentru	$x = +1$	$y'' = +$.

Prin urmare, pentru $x = 0$ funcția $y = x^4 - 2x^2 + 2$ are un maximum, iar pentru $x = -1$ și pentru $x = +1$ minime.

Exemplul 2. Să se cerceteze maximele și minimele funcției $y = x^4$.

Rezolvare.

1) $y' = 4x^3$. 2) $4x^3 = 0$, de unde aflăm rădăcina : $x = 0$.

3) $y'' = 12x^2$. 4) Pentru $x = 0$, $y'' = 0$.

Să folosim deaceea prima metodă :

pentru $x < 0$, $y' < 0$; pentru $x > 0$, $y' > 0$.

Prin urmare, pentru $x = 0$ funcția $y = x^4$ are un minimum. Graficul acestei funcții (parabolă de gradul 4) este arătat în fig. 92.

Observație. Metoda pentru aflarea extremelor unei funcții, expusă în acest paragraf, este inaplicabilă, dacă în punctul respectiv nu există derivata întâi $f'(x)$: dacă pentru $x = c$ nu există derivata $f'(x)$, atunci pentru această valoare x nu există nici derivata a doua.

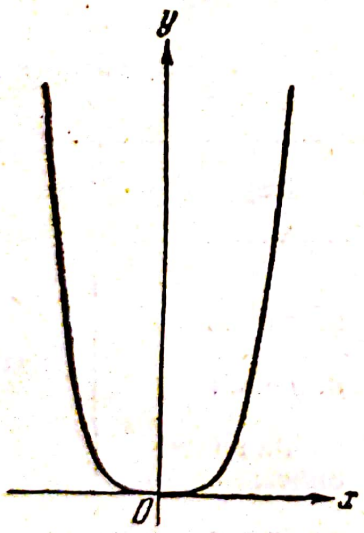

Fig. 92.

§ 78. Convexitatea și concavitatea unei curbe într'un punct

1. Când am învățat noțiunea de funcție, am desenat graficele câtorva funcții. Desenarea graficelor se baza pe construirea unor puncte izolate ale curbei, a căror alegere nu era determinată de niciun fel de considerații precise și avea, în fond, un caracter întâmplător. Este evident că acest mod de reprezentare geometrică a funcției nu putea să caracterizeze îndeajuns de precis mersul variației ei.

Metodele de calcul diferențial obținute până acum de noi ne permit să ținem seama din timp de mersul variației funcției date : ne permit să determinăm intervalele de creștere și de descreștere ale funcției și punctele ei extreme. Construcția graficului funcției pe baza cunoștințelor căpătate va da, desigur, o imagine geometrică mai precisă a mersului variației funcției. Totuși, pentru a putea preciza mai mult graficul, urmează să învățăm cum să determinăm sensul concavității

Scanned with OKEN Scanner

ei pe diferite porţiuni şi să aflăm punctele, în care se produce schimbarea concavităţii în sens contrar. Aceste probleme le vom cerceta în acest paragraf şi în cel următor.

2. Se spune că *o curbă este convexă în jos în punctul M, dacă toate punctele unui arc oarecare al curbei (chiar foarte mic), la stânga şi la dreapta punctului M, sunt situate deasupra tangentei duse la curbă în punctul M.*

In mod analog, se spune că *o curbă este concavă în jos, dacă toate punctele unui arc oarecare al curbei (chiar foarte mic), la stânga şi la dreapta punctului M, sunt situate sub tangenta dusă la curbă în punctul M.*

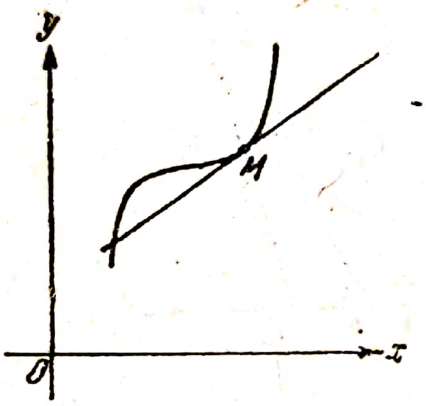

Fig. 93.

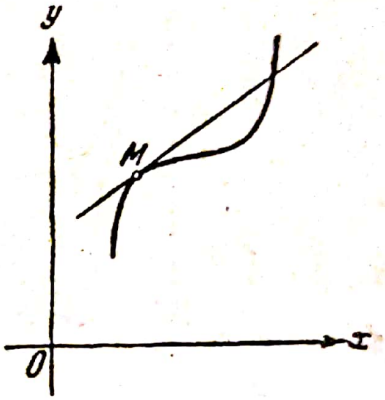

Fig. 94.

Fig. 93 şi 94 dau o reprezentare intuitivă a acestor definiţii : fig. 93 reprezintă cazul convexităţii, iar fig. 94 cazul concavităţii curbei în punctul M.

Să stabilim un criteriu analitic care să ne permită să stabilim dacă o curbă este convexă sau concavă în jos într'un punct dat.

Fie o curbă dată prin ecuaţia $y = f(x)$. Să însemnăm cu c abscisa unui punct M al curbei. Să presupunem că pentru $x = c$ funcţia $y = f(x)$ are derivata a doua $f''(c)$.

Criteriul amintit se formulează prin teorema următoare :

T e o r e m ă. (Criterii suficiente pentru convexitatea şi concavitatea unei curbe într'un punct.) *Fie curba dată, graficul funcţiei* $y = f(x)$. *Dacă* $f''(c) > 0$, *curba este convexă în jos, iar dacă* $f''(c) < 0$, *ea este concavă în jos, în punctul* M $[c, f(c)]$.

Vom considera cazul când în punctul c derivata a doua a funcţiei date este continuă.

Să admitem că $f''(c) > 0$. Cum $f''(x)$ este continuă pentru $x = c$, o modificare neînsemnată a lui x atrage după sine şi o modificare neînsemnată a derivatei a doua. Deaceea, într'un interval anumit în jurul punctului c (la stânga şi la dreapta lui c) $f''(x)$ rămâne pozitiv. De aici urmează, în baza criteriului pentru creşterea unei funcţii (§ 74), că derivata întâi $f'(x)$ creşte în acest interval.

Derivata întâi este coeficientul unghiular al tangentei duse la curbă în punctul dat, adică tangenta unghiului φ, format de tangentă cu direcţia pozitivă a axei Ox. Când tg φ creşte, atunci creşte şi unghiul φ (în sens invers mişcării acelor de ceasornic). Astfel, unghiul de înclinare al tangentei la curbă se măreşte pe măsură ce punctul de tangenţă se apropie de M din stânga, şi continuă să se mărească în timp ce punctul de tangenţă se deplasează la dreapta lui M (chiar dacă este vorba numai despre o porţiune mică a curbei). Privind fig. 95, ne convingem

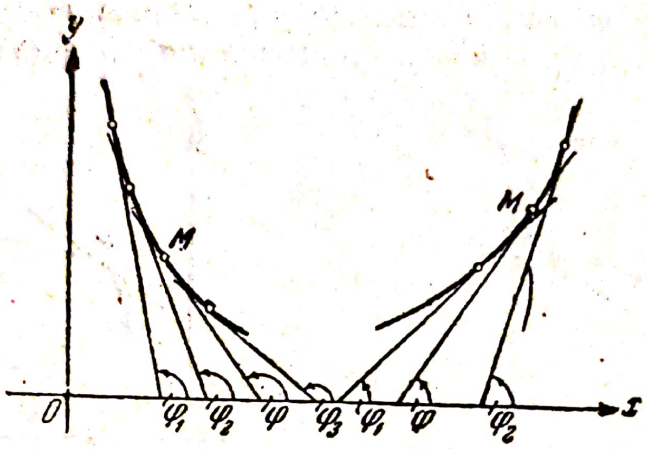

Fig. 95.

atunci că arcul curbei definite de funcţia $y = f(x)$ trebue să fie situat măcar pe o porţiune mică în apropierea punctului M, deasupra tangentei, ceeace înseamnă că în punctul M curba trebue să fie convexă în jos *).

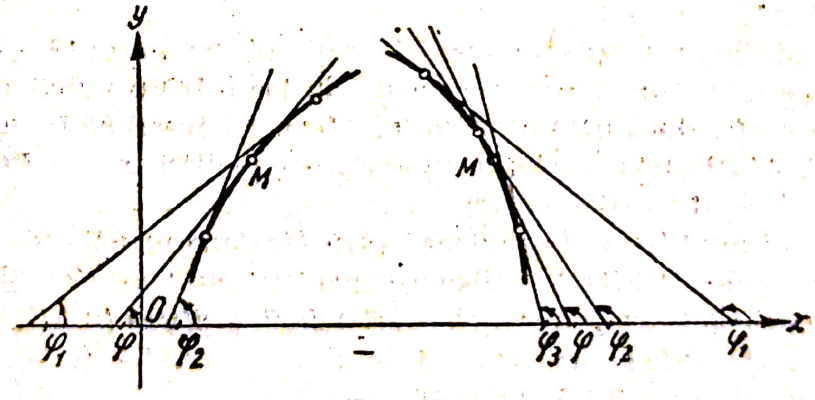

Fig. 96.

Un raţionament asemănător ne permite să tragem concluzia că, dacă $f''(c) < 0$, atunci curba, care reprezintă funcţia $y = f(x)$, este concavă în jos în punctul M $[c, f(c)]$ (fig. 96).

*) Pentru a înţelege mai bine, recomandăm elevului să execute fig. 95, construind mai întâi numai dreptele care formează cu sensul pozitiv al axei Ox unghiurile $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \ldots$ Atunci se vede clar că o curbă, ca să fie tangentă la aceste drepte, trebue dusă deasupra tangentelor.

Dacă o curbă este convexă (concavă) în jos în toate punctele corespunzătoare absciselor din intervalul (a, b), atunci se spune că, *curba este convexă (concavă) în jos, în intervalul* (a, b).

§ 79. Punct de inflexiune

1. Se poate întâmpla ca o curbă, reprezentând graficul funcției $y = f(x)$, să fie convexă în jos în unele intervale și concavă în altele. De exemplu, curba reprezentată în fig. 97 este convexă în jos în intervalele (a, b) și (c, d), iar în intervalul (b, c) este concavă în jos.

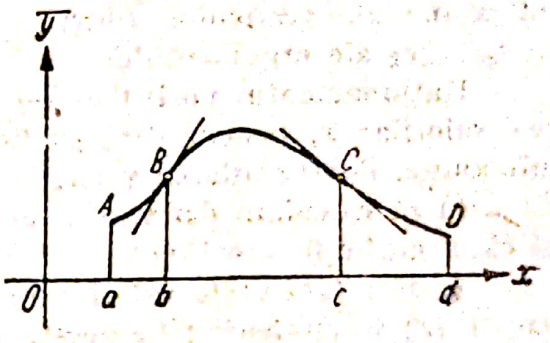

Fig. 97.

Un punct M al unei curbe se numește punct de inflexiune, dacă el desparte o porțiune convexă în jos a curbei de o altă porțiune concavă în jos.

Pe figură punctele B și C sunt punctele de inflexiune.

Este evident că într'un punct de inflexiune curba trebue să treacă dintr'o parte pe partea cealaltă a tangentei duse la curbă în punctul de inflexiune.

Punctele de inflexiune, ca și extremele funcției, constitue elemente „de sprijin" pentru construirea graficelor funcțiilor. Deaceea trebue să învățăm a afla punctele de inflexiune ale unei curbe, date prin ecuația $y = f(x)$.

Vom cerceta funcția $y = f(x)$, continuă în intervalul (a, b), care are derivatele $f'(x)$ și $f''(x)$ continue în acest interval.

Să presupunem că derivata a doua $f''(x)$ nu se anulează pentru niciun x în intervalul (a, b). Fiind continuă, ea va avea semnul neschimbat în acest interval [v. § 75, pct. 2, unde s'a stabilit că o funcție continuă, care își schimbă semnul în intervalul (a, b), se anulează neapărat pentru o valoare anumită x]. Prin urmare, în cazul acesta, curba care reprezintă funcția dată în intervalul (a, b) este sau peste tot convexă în jos, sau peste tot concavă în jos și, deci, nu are puncte de inflexiune.

Astfel, dacă graficul funcției $y = f(x)$ are puncte de inflexiune în intervalul (a, b), atunci le are numai pentru acele valori x, pentru care $f''(x)$ se anulează.

Să presupunem acum că $f''(x)$ se anulează în intervalul (a, b), însă numai într'un număr finit de puncte, de exemplu, în punctele $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$. Atunci în fiecare interval (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_k, b) derivata a doua $f''(x)$ are semnul neschimbat. Să luăm dintre punctele $c_1, c_2, \ldots, c_k$ un punct oarecare, de exemplu c_1. Să admitem că $f''(x) > 0$ în intervalul (a, c_1) și $f''(x) < 0$ în intervalul (c_1, c_2). Atunci graficul

funcţiei $y=f(x)$ este îndreptat în primul interval cu convexitatea în sus, iar în intervalul (c_1, c_2), cu concavitatea în jos şi, deci, are un punct de inflexiune pentru $x = c_1$. La acelaşi rezultat ajungem dacă presupunem că $f''(x) < 0$ în intervalul (a, c_1) şi $f''(x) > 0$, în intervalul (c_1, c_2).

Să presupunem, însfârşit, că $f''(x)$ are acelaşi semn în intervalele (a, c_1) şi (c_1, c_2). Atunci graficul funcţiei este îndreptat în ambele intervale, fie cu convexitatea în sus, fie cu concavitatea în jos, adică, în tot intervalul (a, c_2), graficul funcţiei păstrează acelaşi caracter de curbură şi, prin urmare, nu are un punct de inflexiune pentru $x = c_1$.

Acelaşi raţionament permite rezolvarea problemei punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei pentru oricare din celelalte valori $c_2, c_3, \ldots, c_k$ ale argumentului.

Raţionamentul nostru ne duce la următoarea regulă pentru aflarea valorilor x, pentru care graficul funcţiei $y = f(x)$ are puncte de inflexiune. Pentru aflarea valorilor arătate x trebue :

1) să calculăm derivata a doua $f''(x)$ a funcţiei date $y = f(x)$, al cărei grafic îl cercetăm ;

2) să aflăm acele valori x în interiorul intervalului (a, b), pentru care $f''(x)$ se anulează ; fie aceste valori : $c_1, c_2, \ldots, c_k$;

3) să determinăm semnul lui $f''(x)$ în fiecare interval (a, c_1), $(c_1, c_2), \ldots, (c_k, b)$, în care scop este suficient să stabilim semnul lui $f''(x)$ pentru o valoare oarecare x din fiecare dintre aceste intervale (v. § 75 pct. 3). In acelaşi timp se rezolvă şi întrebarea, dacă $f''(x)$ îşi schimbă semnul sau nu la trecerea prin fiecare din punctele $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Schimbarea semnului lui $f''(x)$ arată că graficul funcţiei $y = f(x)$ are un punct de inflexiune pentru o valoare corespunzătoare x. Dacă semnul lui $f''(x)$ nu se schimbă, atunci nu există punct de inflexiune.

In rezumat, pentru a afla punctele de inflexiune ale curbei, trebue să se facă în raport cu derivata a doua a funcţiei $y = f(x)$ aceeaşi cercetare, care se face pentru aflarea extremelor funcţiei în raport cu derivata întâi (comp. § 75).

Exemplul 1. Să se afle punctele de inflexiune ale graficului funcţiei :

$$y = \frac{1}{12}(x^3 - 6x^2).$$

Rezolvare. Aflăm derivata a doua a funcţiei date :

$$y' = \frac{1}{4}x^2 - x,$$

$$y'' = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}(x - 2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivata a doua există şi este peste tot continuă; pentru $x = 2$ ea se anulează. Valoarea $x=2$ împarte intervalul $(-\infty,+\infty)$ în părţile: $(-\infty, 2)$, $(2,+\infty)$. Determinând semnele derivatei a doua pentru $x = 0$ şi $x = 3$, aflăm semnele ei, respectiv în intervalele $(-\infty, 2)$ şi $(2,+\infty)$. Astfel obţinem:

$$y''_{x=0} = - \text{ şi } y''_{x=3} = +.$$

Deci, în intervalul $(-\infty, 2)$ $y'' = -$,

„ „ $(2, +\infty)$ $y'' = +$.

De aici vedem, că pentru $x = 2$ graficul funcţiei are un punct de inflexiune şi că în intervalul $(-\infty, 2)$ curba este concavă în jos. Graficul funcţiei considerate este reprezentat în fig. 98.

Exemplul 2. Să se afle punctele de inflexiune ale graficului funcţiei $y = x^4$.

Rezolvare.

1) $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$.

2) $y'' = 0$ pentru $x = 0$.

3) $y'' > 0$ atât pentru $x < 0$, cât şi pentru $x > 0$. Prin urmare, graficul funcţiei nu are punct de inflexiune pentru $x = 0$ şi curba $y = x^4$ este convexă în jos în tot intervalul $(-\infty, +\infty)$ (v. fig. 92)

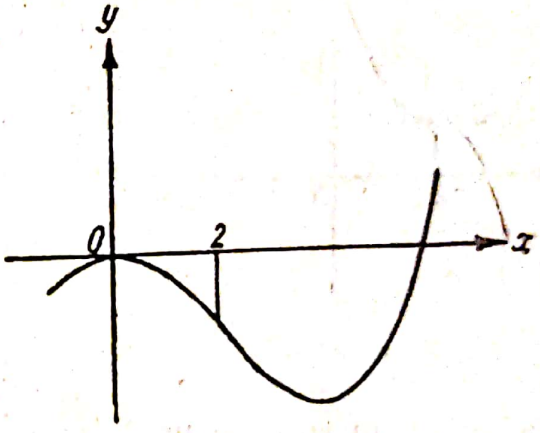

Fig. 98.

2. Regula pentru aflarea punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei $y = f(x)$ se generalizează pentru cazul când funcţia $f(x)$ are în interiorul intervalului (a, b) nu numai un număr finit de valori x, pentru care $f''(x)$ se anulează, ci şi puncte, în care $f''(x)$ nu există (numărul acestor puncte se presupune deasemenea finit). In celelalte puncte ale intervalului (a, b), derivata a doua se presupune continuă. Această generalizare se obţine în mod absolut analog ca şi generalizarea regulii pentru aflarea extremelor unei funcţii, în cazul când nu există derivata întâi a funcţiei date. Să luăm un exemplu pentru cazul acesta.

Exemplu. Să se afle punctele de inflexiune ale graficului funcţiei:

$$y = (x + 2)^{\frac{5}{3}} + 1.$$

Rezolvare.

$$y' = \frac{5}{3}(x + 2)^{\frac{2}{3}};$$

$$y'' = \frac{10}{9}(x + 2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9(x + 2)^{\frac{1}{3}}}$$

Derivata a doua nu se anulează nicăieri, însă nu există pentru $x = -2$. Cum $y''_{x=-3} = -$ și $y''_{x=0} = +$, urmează că:

în intervalul $(-\infty, -2)$ $y'' = -$,

în intervalul $(-2, +\infty)$ $y'' = +$.

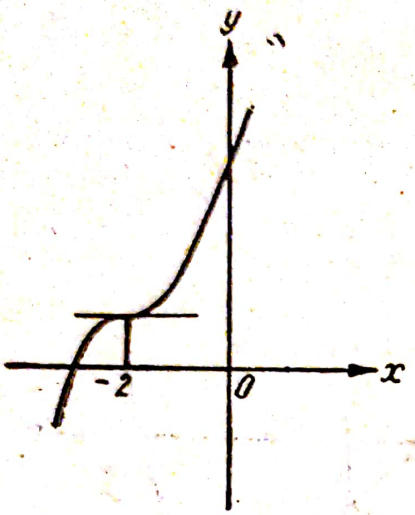

Fig. 99.

În felul acesta, în primul din aceste intervale curba este concavă în jos, iar în al doilea, convexă. Prin urmare, pentru $x = -2$ graficul funcției are un punct de inflexiune. Întrucât $y'_{x=-2} = 0$, tangenta la graficul funcției în punctul de inflexiune este paralelă cu axa Ox (fig. 99).

Funcția $y = \sqrt[3]{x}$ dă exemplul unui caz, când tangenta în punctul de inflexiune al curbei care reprezintă funcția este verticală (v. fig. 91).

§ 80. Construirea graficelor funcțiilor. Exemple

Reunind elementele separate tratate, care caracterizează mersul variației une funcții, vom trece acum la problema construirii graficelor funcțiilor.

La construirea unui grafic, recomandăm următorul plan călăuzitor pentru cercetarea funcției.

1) Determinăm intervalul în care funcția există.

De exemplu, funcția $y = \ln(1 - x^2)$ poate fi considerată numai în intervalul $(-1, +1)$, întrucât valorilor $|x| > 1$ nu le corespund valori reale ale logaritmului, iar pentru $x = \pm 1$ diferența $1 - x^2$ se anulează și ln 0 nu există.

2) Conform regulii stabilite mai înainte, determinăm acele valori ale argumentului, pentru care funcția are extreme.

3) Aflăm valorile x, pentru care graficul funcției are puncte de inflexiune.

4) Calculăm valorile funcției $y = f(x)$, care corespund tuturor valorilor argumentului x aflate mai sus. În felul acesta obținem coordonatele punctelor „de sprijin" ale graficului funcției. Pentru o precizie mai mare în construirea graficului, se mai pot adăuga alte câteva puncte, de exemplu punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate.

5) Transpunem pe figură toate punctele aflate și desenăm graficul însuși, ținând seama de observațiile referitoare la derivatele întâi și a doua ale funcției date.

Se înțelege că acest tip de plan nu este obligatoriu în mod rigid și poate să-și schimbe forma în unele cazuri. În special, dacă expresia

pentru derivata a doua este prea complicată, ne putem limita la construirea graficului pe baza rezultatelor cercetării primei derivate.

Să explicăm printr'un exemplu cele spuse.

Exemplu. Să se construiască graficul funcției

$$y = \frac{x^3}{3} - x.$$

Conducându-ne după planul pentru cercetarea unei funcții, aflăm succesiv :

1) Funcția există pentru toate valorile lui x [în intervalul $(-\infty, +\infty)$].

2) Calculăm derivata întâi a funcției date :

$$y' = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1).$$

Aflăm valorile lui x, pentru care $y' = 0$; aceste valori sunt : $x = -1$ și $x = +1$.

Transpunem aceste abscise pe figură și, sub ele, puțin mai jos de axa abscielor, notăm 0 (aceste notări arată că, pentru valorile x aflate, derivata întâi a funcției date se anulează) (fig. 100).

Prin punctele -1 și $+1$ întreg intervalul $(-\infty, +\infty)$ se împarte în părțile : $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$. Determinăm semnele derivatei în fiecare din aceste intervale :

în intervalul $-\infty < x < -1$ avem : $y'_{x=-2} = 4 - 1 = 3$, adică semnul $+$;

în intervalul $-1 < x < +1$ avem : $y'_{x=0} = -1$, adică semnul $-$;

în intervalul $+1 < x < +\infty$ avem : $y'_{x=2} = 4 - 1 = 3$, adică semnul $+$.

Transportăm semnele derivatei, corespunzătoare diferitelor intervale, pe figură, puțin mai jos de axa Ox. Vedem că pentru $x = -1$ funcția are un maximum, iar pentru $x = +1$, un minimum.

3) Calculăm derivata a doua

$$y'' = 2x.$$

Pentru $x = 0$ derivata a doua se anulează. Aceasta înseamnă că în intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$ ea are semne neschimbate. Determinăm aceste semne :

în intervalul $(-\infty, 0)$ avem : $y''_{x=-1} = -2$, adică semnul $-$;

în intervalul $(0, +\infty)$ avem : $y''_{x=2} = 4$, adică semul $+$;

Transportăm pe figură rezultatele cercetării derivatei a doua sub notațiile, care se referă la rezultatele cercetării derivatei întâi. In intervalul $(-\infty, 0)$ graficul funcției este îndreptat cu concavitatea în jos; prin urmare pentru $x = 0$ graficul are un punct de inflexiune.

Scanned with OKEN Scanner

) Calculăm valorile funcției pentru toate valorile x aflate mai sus :

$$y_{x=-1} = -\frac{1}{3} + 1 = +\frac{2}{3}\ ;\ y_{x=0} = 0;$$

$$y_{x=+1} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Aflăm în complectare abscisele punctelor de intersecție ale graficului cu axa Ox; în acest scop rezolvăm ecuația :

$$\frac{x^3}{3} - x = 0;$$

$$x^3 - 3x = 0;\quad x(x^2 - 3) = 0;\quad x_1 = 0;$$

$$x_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}7;\quad x_3 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7.$$

Construim punctele aflate (fig. 100).

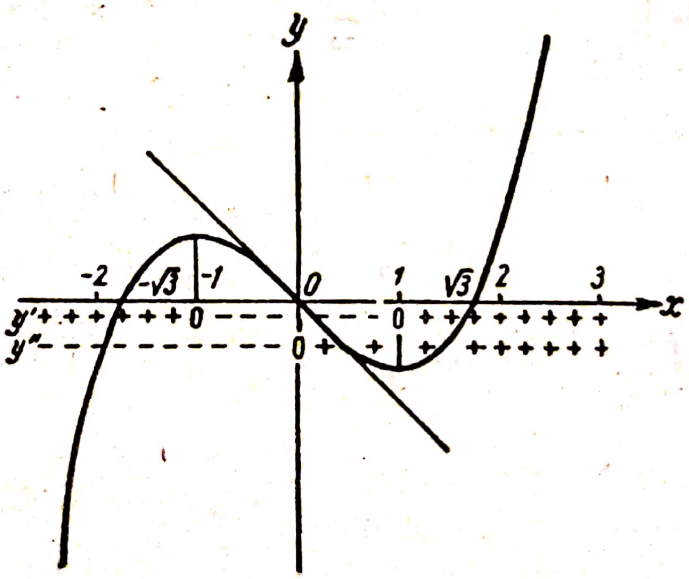

Fig. 100.

Pentru mai mare precizie în construcția graficului, determinăm înclinația tangentei la graficul funcției în punctul de inflexiune (0, 0): $y'_{x=0} = -1$; rezultă de aici că tangenta formează cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de $\frac{3}{4}\pi$ radiani. Construim această tangentă și desenăm graficul funcției conform tuturor datelor obținute (fig. 100).

Exerciții

La § 74;

Să se determine intervalele de creștere și de descreștere ale următoarelor funcții :

1. $y = x^2 + 6x - 4$.

R : Descrește în intervalul $(-\infty, -3)$; crește în intervalul $(-3, +\infty)$.

2. $y = x^3 - 3x^2 + 7$.

R : Crește în intervalele $(-\infty, 0)$ și $(2, +\infty)$; descrește în intervalul $(0, 2)$.

3. $y = x^4 + 4x - 6$.

R : Crește în intervalul $(-1, +\infty)$; descrește în intervalul $(-\infty, -1)$.

4. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 270$.

R : Crește în intervalele $(-\infty, 2)$ și $(3, +\infty)$; descrește în intervalul $(2, 3)$.

5. $y = \frac{1}{x}$.

R : Descrește în intervalul $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$.

6. $y = 8x^2 - \ln x$.

R : Descrește în intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; crește în intervalul $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

7. $y = e^{-x^2}$.

R : Crește în intervalul $(-\infty, 0)$; descrește în intervalul $(0, +\infty)$.

La §§ 75 și 77.

Să se cerceteze maximele și minimele următoarelor funcții :

8. $y = x^2 + 2x - 1$.

R : Pentru $x = -1$, funcția are un minimum.

9. $y = 2x^2 - 5x + 7$.

R : Pentru $x = \frac{5}{4}$, funcția are un minimum.

10. $y = 3 + 8x - x^2$.

R : Pentru $x = 4$, funcția are un maximum.

11. $y = 4 - 3x - 5x^2$.

R : Pentru $x = -\frac{3}{10}$, funcția are un maximum.

Scanned with OKEN Scanner

12. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.

R: Pentru $x = -1$, funcţia are un maximum şi pentru $x = 2$, un minimum.

13. $y = 6 + 12x - x^3$.

R: Pentru $x = -2$, funcţia are un minimum şi pentru $x = +2$, un maximum.

14. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$.

R: Pentru $x = -3$, funcţia are un maximum şi pentru $x = 2$, un minimum.

15. $y = 5 + 36x + 3x^2 - 4x^3$.

R: Pentru $x=2$, funcţia are un maximum şi pentru $x = -\frac{3}{2}$, un minimum.

16. $y = x^3 + 4x$.

R: Funcţia nu are extreme.

17. $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 10$.

R: Funcţia nu are extreme.

18. $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2$.

R: Pentru $x = 0$, funcţia are un maximum, pentru $x = -\frac{1}{2}$ şi $x=2$, minime.

19. $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

R: Pentru $x = -1$, funcţia are un minimum.

20. $y = (x + 2)^2 (x - 4)$.

R: Pentru $x = -2$, funcţia are un maximum şi pentru $x = +2$, un minimum.

21. $y = (x - 1)^3 (x - 2)^2$.

R: Pentru $x = \frac{8}{5}$, funcţia are un maximum şi pentru $x = 2$, un minimum.

22. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

R: Pentru $x = -1$, funcţia are un minimum şi pentru $x = +1$, un maximum.

23. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

R: Pentru $x = -\sqrt{2}$, funcţia are un maximum şi pentru $x = +\sqrt{2}$, un minimum.

24. $y = \frac{1-x}{(1+x)^2}$.

R: Pentru $x = 3$, funcţia are un minimum.

25. Să se împartă numărul 12 în două părţi, astfel ca produsul lor să aibă valoarea maximă.

R: Fiecare parte trebue să fie egală cu 6.

26. Să se împartă numărul 10 în două părţi, astfel ca suma dublului unei părţi şi a pătratului celeilalte să fie minimă.

R: 9 şi 1.

27. Care număr pozitiv, adunat cu inversul său, dă suma cea mai mică?

R: 1.

28. Să se arate că dintre toate dreptunghiurile de perimetru dat, pătratul are aria cea mai mare.

29. Dintre toate dreptunghiurile de perimetru dat să se afle acela care are diagonala cea mai mică.

R: Pătratul.

30. Să se arate că dintre toate dreptunghiurile de arie dată, pătratul are perimetrul cel mai mic.

31. Să se arate că dintre toate dreptunghiurile, înscrise într'un cerc dat, pătratul are perimetrul cel mai mare şi aria cea mai mare.

32. Dintre toţi cilindrii de volum dat, să se afle cel cu aria totală cea mai mare.

R: Înălţimea cilindrului căutat este egală cu diametrul bazei.

33. Dintre toţi cilindrii, înscrişi într'un con dat, să se afle acela care are volumul cel mai mare.

R: Înălţimea cilindrului căutat este egală cu $\frac{1}{3}$ din înălţimea conului.

34. Dintre toate conurile, circumscrise unei sfere date, să se afle cel cu volumul cel mai mic.

R: Înălţimea conului căutat este egală cu patru raze ale sferei; volumul acestui con este de două ori mai mare decât volumul sferei.

35. Dintre toţi cilindrii, înscrişi într'o sferă dată, să se afle cel cu suprafaţa laterală cea mai mare.

R: Înălţimea cilindrului căutat este egală cu diametrul bazei.

36. Dintre toţi cilindrii, înscrişi într o sferă de rază r, să se afle cel care are volumul cel mai mare.

R: Raza bazei cilindrului căutat este egală cu $\sqrt{\frac{2}{3}}\,r$, înălțimea cilindrului este egală cu $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

37. Fereastra normandă are forma unui dreptunghi, având în partea de sus un semicerc. Se dă perimetrul ferestrei. Care trebue să fie relația între lățimea și înălțimea ei, astfel ca prin fereastră să treacă cantitatea cea mai mare de lumină?

R: Raza semicercului trebue să fie egală cu înălțimea dreptunghiului.

38. Se cere să se confecționeze din tablă un jghiab deschis cu secțiunea în formă de trapez isoscel, având baza și cele două laturi egale de câte 4 dm. Cât de lat trebue să fie jghiabul la partea sa superioară, ca să cuprindă cantitatea cea mai mare de apă?

R: 8 dm.

39. Se cere să se îngrădească o bucată de teren dreptunghiulară, folosind o parte din zidul unei case, drept una din laturi. Terenul trebue să aibă o arie determinată, însă dimensiunile lui pot diferi. Care trebue să fie relația dintre lungimile laturilor gardului, ca să se întrebuințeze cât mai puțin material?

R: Latura gardului, paralelă cu zidul casei, trebue să fie dublă cât celelalte laturi.

40. O lampă electrică urmează să fie atârnată deasupra centrului unei piețe rotunde de 100 m diametru. Presupunând că puterea de iluminare variază direct proporțional cu cosinusul unghiului de incidență și invers proporțional cu pătratul distanței la suprafața care urmează să fie luminată, să se determine, la ce înălțime trebue să fie atârnată lampa ca să lumineze cât mai bine o potecă, care trece la marginea pieței.

R: La înălțimea $\frac{50}{\sqrt{2}}$ m.

41. Se cere să se înconjoare cu un gard un teren dreptunghiular, astfel ca el să cuprindă suprafața de 216 m^2, iar apoi să se împartă terenul printr'un gard în două părți egale. Care trebue să fie dimensiunile terenului, pentru ca să se consume cât mai puțin material pentru construcția gardurilor?

R: Lungimea 18 m, lățimea 12 m.

42. O sârmă în lungime de l metri este tăiată în două părți; o parte a sârmei se îndoaie în formă de cerc, cealaltă în formă de pătrat. Să se arate că suma ariilor acestor figuri va avea valoarea cea mai mică în cazul când raportul dintre lungimile celor două părți ale sârmei va fi egal cu $\frac{\pi}{4}$.

43. Un buștean are forma unui trunchi de con; lungimea lui este de 20 m; diametrii bazelor sunt 2 m și 1 m. Care sunt dimensiunile grinzii cu volumul cel mai mare, care poate fi tăiată din buștean, știind că secțiunea grinzii este un pătrat, iar axa grinzii coincide cu cea a bușteanului?

R: Lungimea grinzii este de $13\frac{1}{3}$ m.

44. Se cere să se confecționeze un rezervor cilindric deschis, cu o capacitate de 300 m^3 apă. Costul materialului din care se confecționează fundul rezervorului este dublul costului materialului folosit pentru pereții laterali ai rezervorului. Care trebue să fie dimensiunile rezervorului, pentru ca construcția lui să fie cea mai ieftină?

R: Înălțimea rezervorului este dublul razei bazei.

Scanned with OKEN Scanner

45. Consumul orar de cărbune al unei bărci cu motor este de $0{,}3 + 0{,}001v^3$ tone, unde v este viteza orară a bărcii. Să se determine viteza cea mai economică a bărcii.

R: $\sqrt[3]{150}$ km/oră.

46. Energia cheltuită la deplasarea unui vapor este proporțională cu cubul vitezei lui. Să se afle viteza cea mai economică a vaporului când acesta merge contrar unui curent care are o viteză de a km/oră.

R: $\frac{2}{3}a$.

47. Pe dreapta $y = x$ să se afle un punct astfel ca suma pătratelor distanțelor la punctele $(-a, 0)$, $(a, 0)$ și $(0, b)$ să aibă valoarea cea mai mică.

R: $\left(\frac{b}{6}, \frac{b}{6}\right)$.

48. Pe axa Ox să se afle un punct astfel ca suma distanțelor dela acest punct la punctele $(1, 2)$ și $(4, 3)$ să aibă valoarea cea mai mică.

R: $\left(\frac{11}{5}, 0\right)$.

49. Să se afle pe cercul $x^2 + y^2 = a^2$ un punct, astfel ca suma pătratelor distanțelor la punctele $(2a, 0)$ $(0, 2a)$ să aibă valoarea cea mai mică.

R: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

La § 76.

50. $y = x^2 + 3x - 5$. Să se afle y''. R: $y'' = 2$.

51. $y = 3 - x^3$. Să se afle y''. R: $y'' = -6x$.

52. $y = (x^3 + 1)^2$. Să se afle y''. R: $y'' = 6x(5x^3 + 2)$.

53. $f(x) = (x - 2)^5$. Să se afle $f''(4)$ R: $f''(4) = 160$.

54. $y = e^{3x-2}$. Să se afle y''. R: $y'' = 9e^{3x-2}$.

55. $y = \cos^2 x$. Să se afle y''. R: $y'' = -2\cos 2x$.

56. $y = \frac{1}{x^3}$. Să se afle y''. R: $y'' = \frac{12}{x^5}$.

57. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. Să se afle y''. R: $y'' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Viteza unui punct care se deplasează în linie dreaptă este dată de condițiile următoare. Să se determine accelerația punctului în momentele indicate.

58. $v = t^2 + 2t$; $t = 3$. R: $j = 8$.

59. $v = 3t - t^3$; $t = 2$. R: $j = -9$.

60. $v = 4\sin\frac{t}{2}$; $t = \frac{\pi}{3}$ R: $j = \sqrt{3}$.

61. $v = a\cos 3t$; $t = \frac{\pi}{6}$. R: $j = -3a$.

62. $v = 5e^{2t}$; $t = 1$. R : $j = 10e^2$.

Să se afle pentru momentele indicate în fiecare exercițiu spațiul parcurs, viteza și accelerația unui punct care se mișcă după legea dată de următoarele ecuații.

63. $s = t^3 + 2t^2$; $t = 2$. R : $s = 16, v = 20, j = 16$.

64. $s = 2t - t^2$; $t = 1$. R : $s = 1, v = 0, j = -2$.

65. $s = 2 \sin t$; $t = \frac{\pi}{4}$. R : $s = \sqrt{2}, v = \sqrt{2}, j = -\sqrt{2}$.

66. $s = a \cos \frac{\pi t}{3}$; $t = 1$. R : $s = \frac{a}{2}$, $v = -\frac{\pi a \sqrt{3}}{6}$, $j = -\frac{\pi^2 a}{18}$

67. $s = 2e^{3t}$; $t = 0$. R : $s = 2$, $v = 6$, $j = 18$.

La §§ 78 și 79.

Să se cerceteze convexitatea și concavitatea următoarelor curbe și să se afle punctele lor de inflexiune :

68. $y = x^3 - 3x + 3$.

R : Curba este concavă în jos în intervalul $-\infty < x < 0$ și convexă în jos în intervalul $0 < x < +\infty$; punct de inflexiune (0, 3).

69. $y = 5 - 2x - x^2$.

R : Curba este peste tot concavă în jos.

70. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

R : Curba este convexă în jos în intervalele $-\infty < x < 2$ și $4 < x < +\infty$ și concavă în jos în intervalele $2 < x < 4$; punctele de inflexiune (2, 62) și (4, 206)

71. $y^3 = x - 1$.

R : Curba este convexă în jos în intervalul $0 < x < 1$ și concavă în jos în intervalul $1 < x < +\infty$; punct de inflexiune (1, 0).

72. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1}$.

R : Curba este concavă în jos în intervalul $(-\infty, 0)$, convexă în jos în intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, concavă în jos în intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, convexă în jos în intervalul $(1, +\infty)$; punct de inflexiune $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

73. $y = e^x$.

R : Curba este peste tot convexă în jos.

74. $y = \ln x$.

R : Curba este peste tot concavă în jos.

75. $y = \sin x$.

R : Puncte de inflexiune pentru $x = n\pi$, unde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

76. $y = xe^x$.

R: Curba este concavă în jos în intervalul $-\infty < x < -2$ și convexă în jos în intervalul $-2 < x < +\infty$; punct de inflexiune pentru $x = -2$.

77. $y = e^{-x^2}$.

R: Curba este convexă în jos în intervalul $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, concavă în jos în intervalul $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, convexă în jos în intervalul $\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$; puncte de inflexiune $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

La § 80.

Să se construiască graficele funcțiilor date în exercițiile 1, 2, 3, 8, 9, 10, 12 16, 18, 20, 21, 22.

Să se construiască graficele următoarelor funcții:

78. $y = 1 + 6x - 3x^2$.

79. $y = 2x^2 - 8x - 11$.

80. $y = x^3 - 3x + 2$.

81. $y = 2x^3 + x^2 - 2$.

82. $y = 2 - x - x^3$.

83. $y = 3x^4 + 2x^2 - 5$.

84. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 20$.

85. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

86. $y = x + \frac{1}{x}$.

87. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.

88. $y = 1 + x + \frac{1}{x^3}$.

89. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^3}$ $(a > 0)$.

CAPITOLUL VIII

DIFERENȚIALA

§ 81. Diferențiala ca parte principală a creșterii funcției

1. In § 43 s'a arătat că raportul a două mărimi infinit mici $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ pentru $x \to c$ poate fi o mărime infinit mică sau o mărime infinit mare sau o mărime finită. Aceasta este în funcție de caracterul variației infiniților mici.

Să luăm, de exemplu, infiniții mici x^2 și x^3 pentru $x \to 0$. Vom da argumentului x valori care se apropie de zero, de exemplu, valorile

0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ...Infinitul mic x^2 va lua valorile corespunzătoare : 0,01 ; 0,0001 ; 0,000001 ; ..., iar infinitul mic x^3 valorile 0,001 ; 0,000001 ; 0,000000001 ; ...

Comparând aceste valori ale mărimilor x^3 şi x^2, putem spune că x^3 tinde mai repede către 0 decât x^2. Deaceea raportul $\frac{x^3}{x^2} = x$ tinde către 0 pentru $x \to 0$, adică este o mărime infinit mică pentru $x \to 0$, iar raportul $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ creşte nelimitat, adică este o mărime infinit mare pentru $x \to 0$.

Exemplele tratate ne conduc la ideea utilităţii comparării unor mărimi infinit mici între ele, în privinţa vitezei cu care tind către zero. In acest scop stabilim următoarea definiţie :

Fie $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ *două mărimi infinit mici pentru* $x \to c$. *Dacă,*

$$\lim_{x \to c} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = 0,$$

atunci $\varphi_1(x)$ *se numeşte infinit mic de ordin superior în comparaţie cu* $\varphi_2(x)$. *Dacă*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

este un număr diferit de zero, atunci se spune că infiniţii mici $\varphi_1(x)$ *şi* $\varphi_2(x)$ *au acelaşi ordin de mărime. Dacă, însfârşit :*

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

este o mărime infinit mare pentru $x \to c$, *atunci* $\varphi_1(x)$ *se numeşte infinit mic de ordin mai mic decât* $\varphi_2(x)$.

Exemple. Dacă $\varphi_2(x) = x \to 0$, atunci, comparativ cu acest infinit mic, infiniţii mici sin x şi tg x vor fi de acelaşi ordin, fiindcă :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1.$$

Infiniţii mici x^2, x^3 şi $1 - \cos x$ pentru $x \to 0$ vor fi de ordin superior lui x, fiindcă :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Infinitul mic $x-1$ este, pentru $x \to 1$, de ordin inferior în comparație cu $(x-1)^2$, fiindcă raportul $\frac{x-1}{(x-1)^2}$, egal în jurul punctului 1 cu raportul $\frac{1}{x-1}$, este o mărime infinit mare pentru $x \to 1$.

2. Să admitem că funcția $y = f(x)$ are derivata $y' = f'(x)$ pentru o valoare dată x. Cum :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

avem în baza definiției limitei,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

unde α este un infinit mic pentru $\Delta x \to 0$. Determinând din ultima egalitate creșterea Δy, obținem [v. egalitatea (8) § 55] :

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x. \qquad (1)$$

Formula (1) arată că creșterea Δy a funcției y constă din doi termeni : $f'(x)\,\Delta x$ și $\alpha\,\Delta x$. Dacă nu ținem seamă de cazul special, când $f'(x) = 0$, primul termen este pentru $\Delta x \to 0$ un infinit mic de același ordin ca și Δx, întrucât

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0.$$

Termenul al doilea $\alpha \Delta x$ este pentru $\Delta x \to 0$ o mărime de ordin mai mic decât Δx, fiindcă :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Din cauza aceasta, termenul $f'(x)\Delta x$ are rolul principal în relația (1), care definește mărimea creșterii Δy a funcției y. Ea poartă și denumirea de *parte principală* a creșterii funcției. Astfel termenul $f'(x)\Delta x$ se numește *diferențiala* funcției $y = f(x)$.

Deci, diferențiala funcției $y = f(x)$ este egală cu produsul dintre derivata funcției și o creștere arbitrară a argumentului.

Diferențiala funcției $y = f(x)$ se înseamnă cu simbolul dy. Prin urmare, putem scrie :

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

3. Revenind la formula (1) :

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x = dy + \alpha \Delta x,$$

tragem concluzia că creşterea Δy şi diferenţiala dy a funcţiei $y = f(x)$ nu sunt în general egale şi se deosebesc prin mărimea $\alpha \Delta x$:

$$\Delta y - dy = \alpha \Delta x. \tag{3}$$

Ca diferenţială a variabilei independente x se ia creşterea Δx, adică se pune prin convenţie

$$dx = \Delta x$$

Inlocuind în formula (2) pe Δx prin dx, aflăm:

$$dy = f'(x)\, dx. \tag{4}$$

Prin urmare, *diferenţiala* dy *a funcţiei* $y = f(x)$ *este produsul dintre derivata funcţiei şi diferenţiala* dx *a variabilei independente* x.

Impărţind prin dx ambii membri al egalităţii (4), obţinem:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

(se citeşte „de igrec pe de ix").

Din formula (5) vedem că *derivata* $f'(x)$ *a funcţiei* $y = f(x)$ *reprezintă raportul între diferenţiala* dy *a funcţiei şi diferenţiala* dx *a argumentului.*

Exemplu. Să se afle diferenţiala funcţiei $y = x^3$.

Rezolvare. Să scriem creşterea Δy a funcţiei $y = x^3$;

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Ultimii doi termeni dau o mărime de ordin superior în comparaţie cu Δx. In adevăr

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0.$$

Neglijând mărimea de ordin superior în comparaţie cu Δx, aflăm conform formulei (1) partea principală a creşterii funcţiei sau diferenţiala ei:

$$dy = 3x^2 \cdot \Delta x, \text{ sau } dy = 3x^2\, dx, \text{ întrucât } \Delta x = dx.$$

Rezultatul obţinut corespunde formulei (4). In adevăr, $(x^3)' = 3x^2$, şi vedem că $dy = f'(x)\, dx = 3x^2\, dx$.

Impărţind prin dx egalitatea obţinută, ajungem la rezultatul, care exemplifică formula (5): $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 = \frac{dy}{dx}$.

4 Variabila independentă x şi creşterea ei Δx (sau dx) nu sunt legate în niciun fel şi pot fi alese în mod absolut independent una de cealaltă. Deaceea *diferenţiala funcţiei*:

$$dy = f'(x)\, dx$$

este o funcţie de două variabile independente: x *şi* dx.

Scanned with OKEN Scanner

Să lămurim printr'un exemplu cele expuse.

Să luăm funcţia $y = x^3$. Să admitem că ni se dă o valoare numerică pentru x, de exemlu $x = 2$. Atunci vom putea să scriem numai :

$$[dy]_{x=2} = [(x^3)' \, dx]_{x=2} = [3x^2]_{x=2} \cdot dx = 12 \, dx.$$

Pentru determinarea valorii numerice a lui dy, ne lipseşte valoarea numerică dx. Cum dx nu depinde de x, valoarea lui dx trebue să fie dată separat. Dacă ştim, de exemplu, că $dx = 0{,}1$ atunci putem determina şi valoarea numerică dy :

$$[dy]_{\substack{x=2 \\ dx=0,1}} = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2.$$

§ 82. Interpretarea geometrică a diferenţialei unei funcţii

Să admitem că graficul funcţiei $y = f(x)$ este reprezentat prin curba din fig. 101. Prin valoarea x a argumentului şi valoarea y a funcţiei se determină pe curbă punctul M.

Să admitem că în punctul M curba are tangenta MT. După cum ştim (§ 54), coeficientul unghiular tg φ al tangentei este egal cu derivata $y' = f'(x)$. Dacă dăm abscisei $x = ON$ creşterea $\Delta x = dx = NN'$, atunci ordonata $y = NM$ a curbei va primi creşterea QM'.

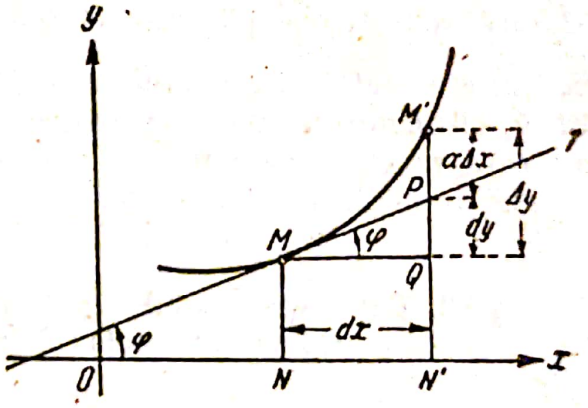

Fig. 101.

Totodată ordonata tangentei primeşte creşterea QP. Calculând QP ca o catetă a triunghiului dreptunghic MQP, aflăm :

$$QP = MQ \text{ tg } \varphi = f'(x) \, dx = dy.$$

Deci, *din punct de vedere geometric, diferenţiala* dy *a funcţiei* $y = f(x)$ *reprezintă creşterea ordonatei tangentei duse în punctul dat,* M, *al curbei*; sau, diferenţiala dy reprezintă acea creştere, pe care ar fi primit-o o ordonată $NM = y$, în cazul modificării abscisei ON cu mărimea $NN' = dx$, dacă punctul care descrie curba s'ar fi îndreptat în linie dreaptă după tangenta dusă în M.

Din figură avem : $PM' = QM' - QP = \Delta y - dy$.

Conform formulei (3)

$$\Delta y - dy = \alpha \Delta x ;$$

în felul acesta, segmentul PM' exprimă sensul geometric al mărimii

$\alpha\Delta x$; ea este un infinit mic de ordin superior lui Δx şi reprezintă diferenţa dintre creşterea lui Δy şi diferenţiala dy.

Se înţelege că creşterea Δy poate fi mai mică decât dy. Lăsăm pe seama elevilor să facă singuri construcţia geometrică corespunzătoare.

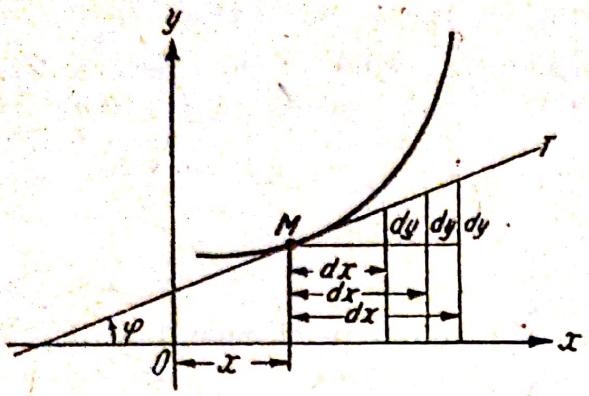

Fig. 102.

Din formula (5) a paragrafului precedent urmează că derivata este raportul dintre diferenţiala funcţiei şi diferenţiala argumentului. Pentru o valoare determinată x, derivata $f'(x)$ este o mărime constantă. Rezultă de aici că la o modificare a creşterii, $\Delta x = dx$, a argumentului, diferenţiala dx se modifică astfel, încât raportul $\frac{dy}{dx}$ păstrează totdeauna o valoare constantă. Acest fapt este arătat în mod intuitiv cu ajutorul fig. 102 : când dx se modifică, obţinem un număr de triunghiuri dreptunghice asemenea, pentru care raportul catetelor rămâne totdeauna egal cu tangenta unghiului de înclinare al tangentei faţă de axa Ox, adică cu derivata.

§ 83. Extinderea regulilor şi formulelor fundamentale pentru aflarea derivatelor la aflarea diferenţialelor

Diferenţiala funcţiei $y = f(x)$ este produsul dintre derivata $f'(x)$ a funcţiei date şi diferenţiala dx a argumentului.

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Prin urmare, aflarea diferenţialei se reduce la aflarea derivatei funcţiei date şi înmulţirea ei cu dx. Noi ştim să aflăm derivate şi deaceea aflarea diferenţialelor nu prezintă nicio dificultate.

Formulele fundamentale de diferenţiere, cuprinse în § 56, pot fi exprimate prin diferenţiale în felul următor :

I. $dc = (c)'\,dx = 0$ (c este o mărime constantă).

II. $d(u \pm v) = (u' \pm v')\,dx = u'\,dx \pm v'\,dx = du + dv$

(întrucât $u'\,dx$, adică produsul dintre derivata funcţiei u şi dx este diferenţiala acestei funcţii, adică du ; tot astfel $v'\,dx = dv$).

III. $d(uv) = (u'v + v'u)\,dx = v(u'\,dx) + u(v'\,dx) = v\,du + u\,dv$.

IV. $d(cu) = c \cdot u' \cdot dx = c\,du$.

V, $\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x.$

VI. $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}\,\mathrm{d}x = \frac{v(u'\,\mathrm{d}x) - u(v'\,\mathrm{d}x)}{v^2} = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$

VII, $\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e \cdot \mathrm{d}x.$

VIII. $\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$

IX. $\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a\,\mathrm{d}x.$

X. $\mathrm{d}(e^x) = e^x\,\mathrm{d}x.$

XI. $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x.$

XII. $\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x.$

XIII. $\mathrm{d}(\mathrm{tg}\ x) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$

XIV. $\mathrm{d}(\mathrm{ctg}\ x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}.$

XV. $\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

XVI. $\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

XVII. $\mathrm{d}(\mathrm{arctg}\ x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

XVIII. $\mathrm{d}(\mathrm{arcctg}\ x) = -\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

Exemplu. Să se afle diferențiala funcției $y = \mathrm{tg}\ (1 + x^2)$.

Rezolvare. Luăm $y' = \frac{1}{\cos^2(1+x^2)} \cdot 2x$

atunci $\mathrm{d}y = \frac{2x}{\cos^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

Operațiunea de aflare a diferențialei unei funcții date $y = f(x)$, ca de altfel și operațiunea de derivare, se numește diferențiere.

§ 84. Aplicarea diferențialei la calcule aproximative

1. Diferențiala $\mathrm{d}y = f'(x)\,\Delta x$ a funcției $y = f(x)$ depinde liniar de Δx. Creșterea Δy a funcției y, determinată prin relația :

$$\Delta y = \mathrm{d}y + \alpha\Delta x$$

Scanned with OKEN Scanner

(unde $\alpha \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$), reprezintă o funcţie mai complicată de Δx. Din cauza aceasta calcularea creşterii funcţiei este incomparabil mai complicată decât calcularea diferenţialei ei.

Pentru valorile Δx apropiate de zero, valorile lui α sunt deasemenea apropiate de zero. Deaceea înlocuirea lui Δy prin diferenţiala dy (pentru valori Δx apropiate de zero) duce în practică la erori foarte mici.

Pe considerentul că diferenţiala unei funcţii se calculează mai uşor şi că diferenţa dintre Δy şi dy este neglijabilă (pentru valori Δx apropiate de zero) se bazează înlocuirea creşterii funcţiei Δy prin diferenţiala dy în calculele aproximative.

2. Această înlocuire este foarte convenabilă la calculul erorilor.

Să admitem, de exemplu, că mărimea x este determinată prin măsurare directă, iar mărimea y se calculează prin formula $y = f(x)$. La măsurarea lui x se strecoară totdeauna o eroare Δx, care atrage după sine eroarea Δy la calcularea mărimii y.

Intrucât, pentru o bună precizie a măsurătorii, eroarea Δx este deobicei neînsemnată, se poate presupune că :

$$\Delta y \approx dy = y' \Delta x,$$

adică creşterea Δy se înlocueşte prin diferenţiala dy.

Construcţia instrumentului de măsurat dă deobicei posibilitatea de a stabili valoarea cea mai mare cu care se poate greşi într'un sens sau în celălalt la măsurarea mărimii x.

De exemplu, la citirea sau fixarea cursorului unei rigle de calcul de 250 mm, eroarea nu trece de 0,1 mm. Astfel se cunoaşte deobicei eroarea maximă absolută, care poate interveni la măsurarea mărimii x; să însemnăm această eroare cu δx. Prin urmare $|\Delta x| \leqslant \delta x$. Atunci este natural să considerăm drept eroare maximă absolută la calcularea mărimii y, cantitatea :

$$\delta y = |y'| \delta x.$$

Raporturile $\frac{\delta x}{|x|}$ şi $\frac{\delta y}{|y|}$ se numesc *erori maxime relative* care vin la determinarea mărimilor x şi y. Este evident, că aceste mărimi caracterizează precizia rezultatelor obţinute.

Vom arăta prin exemple, cum se aplică aceste noţiuni.

Exemplul 1. Să presupunem că pentru determinarea ariei unui cerc se măsoară la început în mod direct diametrul D (cu ajutorul unui micrometru, a unui şublăr etc.), iar apoi se calculează aria A după formula :

$$A = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Luăm

$$A'_D = \frac{\pi}{2} D$$

urmează

$$\delta A = \frac{\pi}{2} l \delta D,$$

și

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\frac{\pi}{2} l \delta D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2 \frac{\delta D}{D}.$$

Astfel, eroarea maximă relativă în valoarea ariei este dublul erorii maxime relative a valorii măsurate a diametrului.

Exemplul 2. Să se determine unghiul φ de înclinație al acului magnetic la măsurarea intensității curentului cu ajutorul unui galvanometru tangențial, care este cel care corespunde mai bine din punct de vedere al preciziei.

Știm că intensitatea i a curentului este proporțională cu tg φ, adică $i = k \operatorname{tg} \varphi$, unde k este un coeficient de proporționalitate.

Fie $\delta\varphi$ eroarea maximă absolută obținută la citirea unghiului φ. Atunci:

$$\delta i = (k \operatorname{tg} \varphi)' \delta\varphi = \frac{k \delta\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

și

$$\frac{\delta i}{i} = \frac{k \delta\varphi}{\cos^2 \varphi} : (k \operatorname{tg} \varphi) = \frac{\delta\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{2\delta\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

Vedem că precizia va fi cea mai mare, dacă $\sin 2\varphi = 1$, adică $\varphi = \frac{\pi}{4}$, și cea mai mică pentru valorile $\sin 2\varphi$ apropiate de zero, adică pentru valorile φ apropiate de 0 și de $\frac{\pi}{2}$, când eroarea relativă crește în mod nelimitat.

Prin urmare, trebue să evităm măsurări la unghiuri de înclinație ale acului apropiate de 0 sau $\frac{\pi}{2}$.

Să admitem, că $\delta\varphi = 0{,}5°$. Exprimând unghiurile în radiani, aflăm atunci:

$$\delta\varphi = 0{,}5 \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01745$$

$$\frac{\delta i}{i} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01745}{\sin 2\varphi} = \frac{0{,}01745}{\sin 2\varphi}.$$

Dacă am avut, de exemplu, o citire de 30°, atunci $\sin 2\varphi = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}73205$ și

$$\frac{\delta i}{i} = \frac{2 \cdot 0{,}01745}{0{,}73205},$$

adică aproximativ 2%.

3. Tot astfel, pe înlocuirea creşterii Δy prin diferenţiala dy a funcţiei $y = f(x)$, se bazează şi obţinerea unor formule folosite adeseori în practică.

De exemplu pentru valori mici date lui $|h|$ se foloseşte adeseori formula de aproximaţie :

$$(1 + h)^a \approx 1 + ah.$$

Deducerea acestei formule aproximative se bazează pe următoarele considerente.

Să luăm funcţia $y = x^a$. Punând $x=1$ şi apoi $x = 1 + h$, exprimăm creşterea funcţiei $\Delta y = (1 + h)^a - 1$. Inlocuim această creştere prin diferenţiala : $dy = ax^{a-1}\,dx$. Pentru $x = 1$ şi $dx = h$ obţinem aproximativ :

$$(1 + h)^a - 1 \approx a \cdot h,$$

de unde aflăm :

$$(1 + h)^a \approx 1 + ah.$$

In mod analog se poate pune aproximativ pentru valorile mici ale lui φ :

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

In adevăr, în funcţia $y = \sin x$ facem $x = 0$ apoi $x = \varphi$ şi formăm creşterea Δy :

$$\Delta y = \sin \varphi - \sin 0 = \sin \varphi.$$

Inlocuind pe Δy prin diferenţiala $dy = \cos x\,dx$, obţinem, pentru $x = 0$ şi $dx = \varphi$, formula aproximativă :

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

Tot astfel deducem o formulă aproximativă pentru calcularea expresiei $\ln (1 + h)$ pentru valori mici date lui h.

Dacă $y = \ln x$, atunci $dy = \dfrac{dx}{x}$. Exprimăm creşterea funcţiei Δy, corespunzătoare trecerii dela valoarea $x = 1$ la valoarea $x=1 + h$:

$$\Delta y = \ln (1 + h) - \ln 1 = \ln (1 + h),$$

de unde obţinem, aproximativ, pentru $x = 1$ şi $dx = h$:

$$\Delta y = \ln (1 + h) \approx \frac{h}{1} = h.$$

§ 85. Diferenţiala unui arc de curbă

Fie o curbă dată de ecuaţia $y = f(x)$. Să notăm cu s lungimea variabilă a arcului, socotită dela punctul fix A la punctul M, pe care îl considerăm variabil, adică mobil pe curbă (fig. 103).

Atunci s va fi funcţie de abscisa x a punctului M; fiecărei valori x îi corespunde o poziţie determinată a punctului M pe curbă, prin urmare, o valoare determinată pentru lungimea s a arcului AM. Să aflăm diferenţiala acestei funcţii. Ştim că diferenţiala unei funcţii este produsul derivatei cu diferenţiala argumentului (§ 81); deaceea putem scrie:

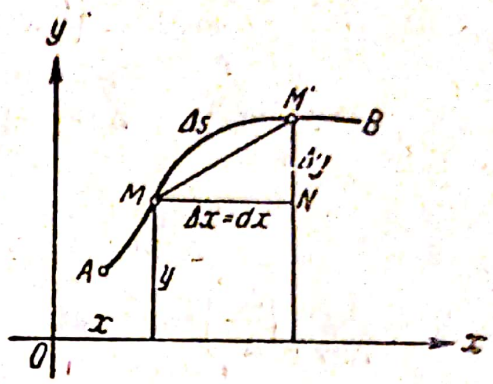

Fig. 103.

$$ds = s'\,dx.$$

Prin urmare, problema noastră se reduce la aflarea derivatei s' a arcului.

Să dăm în acest scop valorii alese a lui x o creştere $\Delta x = dx$, ceeace are drept urmare o deplasare a punctului M în poziţia M', şi arcul $s = \overset{\frown}{AM}$ va primi creşterea $\Delta s = \overset{\frown}{MM'}$.

Derivata arcului este limita raportului $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$. Pentru a afla limita acestui raport, să-l transformăm înmulţind şi împărţind cu lungimea coardei $\overline{MM'}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} \cdot \frac{\overline{MM'}}{\Delta x}.$$

Trecem acum la limită:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta x}.$$

Să acceptăm fără demonstraţie că $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} = 1$.

Demonstrarea precisă a acestui fapt este prea complicată pentru un curs elementar, pe când rezultatul este destul de evident: când punctul M' se apropie dealungul curbei de punctul M, segmentul de arc se aseamănă tot mai mult cu segmentul de coardă $\overline{MM'}$. Pentru cazul

cercului, această propoziție a fost stabilită absolut precis în § 68, unde am demonstrat egalitatea

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Întrucât :

$$\overline{MM'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \text{ obținem :}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

sau :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2};$$

deoarece $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = y'$, aflăm însfârșit : $s' = \sqrt{1 + y'^2}$ și deci :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{6}$$

Introducând factorul dx sub radical, putem scrie formula obținută și sub forma :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{6*}$$

Nu este greu de stabilit sensul geometric al diferențialei arcului. Diferențiala dy a ordonatei curbei $y = f(x)$ este egală, cum știm, cu creșterea ordonatei tangentei corespunzătoare creșterii $\Delta x = dx$ (§ 82). Și atunci, cum se poate ușor vedea în fig. 104,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{NT}^2} = \overline{MT},$$

adică diferențiala arcului este egală cu segmentul tangentei cuprins între punctul de tangență și punctul de intersecție al tangentei cu ordonata corespunzătoare abscisei $x + dx$.

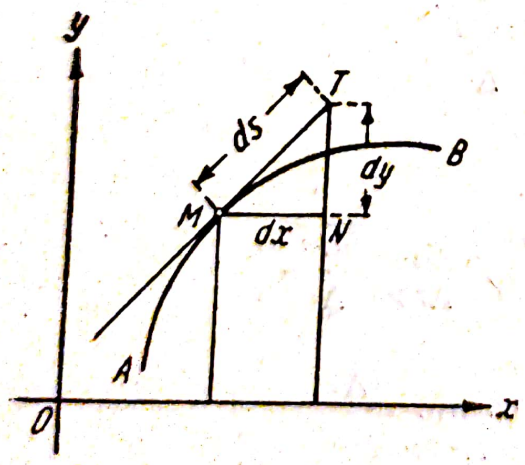

Fig. 104.

§ 86. Curbura unei curbe

Unul dintre elementele care caracterizează o curbă este gradul de curbare în diferite puncte ale ei.

Dacă vom trece dela un punct M al curbei la altul M', atunci se va schimba în același timp poziția tangentei la curbă ; tangenta se va roti. Aceasta deosebește curba de dreaptă, a cărei tangentă coincide cu dreapta însăși în toate punctele ei și prin urmare, are totdeauna aceeași direcție. Este evident că, cu cât unghiul de rotație al tangentei, la

trecerea dela punctul M al curbei la punctul M', va fi mai mare, cu atât mai mult arcul curbei se va deosebi de o dreaptă şi va fi mai curbat.

Insă gradul de curbură al unui arc nu poate fi caracterizat numai prin unghiul de rotaţie al tangentei la trecerea dela un capăt al arcului la celălalt : pe fig. 105 sunt arătate două arce $\overset{\smile}{mm'}$ şi $\overset{\smile}{MM'}$ ale căror grade de curbură sunt evident diferite şi pentru care unghiul de rotaţie al tangentei este acelaşi. Este neapărat necesar să se ţină seama şi de lungimea curbei pentru a stabili gradul ei de curbură. Cum se vede din fig. 105, gradul de curbură va fi cu atât mai mare, cu cât lungimea arcului va fi mai mică la acelaşi unghi de rotaţie al tangentei.

Deaceea este natural să se considere drept *curbură medie* a unui arc de curbă raportul dintre unghiul format de tangentele duse la extremităţile arcului şi lungimea acestui arc sau, cu alte cuvinte, unghiul de rotaţie al tangentei, raportat la unitatea de lungime a arcului : curbura medie a arcului $MM' = \dfrac{\alpha}{\overset{\smile}{MM'}}$. Vom presupune totdeauna că unghiul α este exprimat în radiani.

Să calculăm, de exemplu, curbura medie a unui cerc de raza R. Pentru orice arc al cercului, unghiul α format de tangentele la cerc, duse în extremităţile arcului, este egal cu unghiul format de razele punctelor de tangenţă (fig. 106).

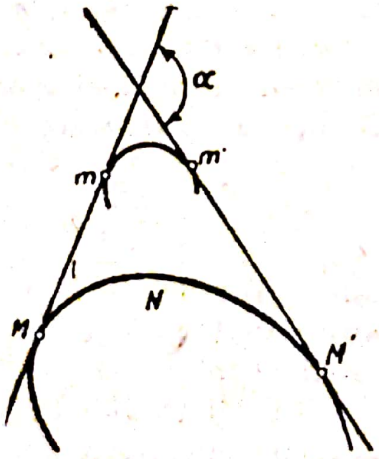

Fig. 105.

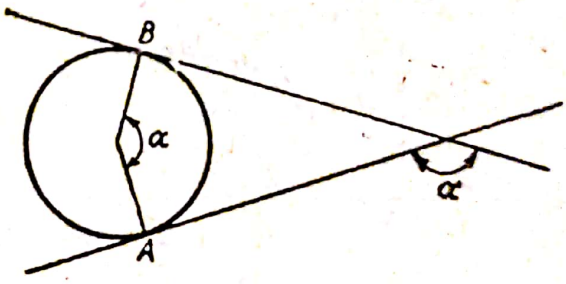

Fig. 106.

Lungimea arcului $\overset{\smile}{AB}$ este egală cu αR; prin urmare, curbura medie a arcului este aceeaşi în toate părţile ei şi este egală cu

$$\frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}.$$

Curbura medie a cercului este o mărime inversă razei cercului. Ea este prin urmare cu atât mai mare, cu cât raza cercului este mai mică.

Curbura medie caracterizează gradul de curbură al unui arc în global. Insă în diferite părţi ale aceluiaşi arc gradul de curbură poate fi diferit, de exemplu, în fig. 105 partea $\overset{\smile}{MN}$ a arcului $\overset{\smile}{MM'}$ este mai curbată decât partea $\overset{\smile}{NM'}$. Din cele spuse reiese clar, că curbura medie caracterizează cu atât mai bine gradul de curbură al arcului în diferitele sale puncte, cu cât lungimea acestui arc este mai mică. Este deaceea natural să se considere *drept curbură K a curbei în punctul M limita curburii medii a arcului MM', când lungimea arcului MM' tinde către zero*, adică

$$K = \lim_{\overset{\smile}{MM'} \to 0} \frac{\alpha}{\overset{\smile}{MM'}}.$$

Cum se vede, trecerea dela curbura medie la curbura într'un punct este cu totul asemănătoare cu trecerea dela viteza medie de mişcare a unui corp la viteza sa într'un anumit moment.

Să aflăm acum formula pentru calcularea curburii K într'un punct. Observăm că deobicei curba este dată prin ecuaţia ei $y = f(x)$. Dacă căutăm curbura într'un punct, aceasta înseamnă că trebue să considerăm cunoscute şi coordonatele unui punct al acestei curbe. Deaceea, a deduce formula pentru calcularea curburii înseamnă a exprima

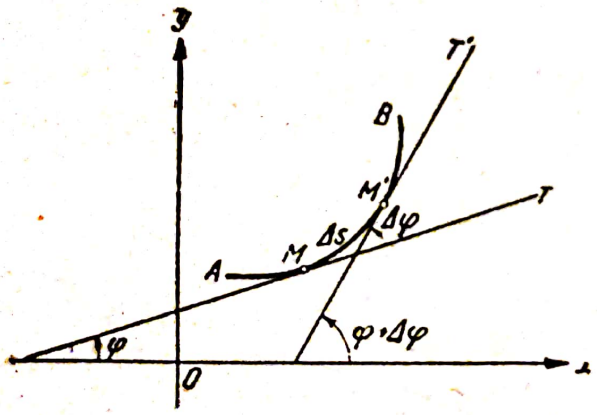

Fig. 107.

$$\lim \frac{\alpha}{\overset{\smile}{MM'}}$$

prin coordonatele x şi y ale punctului M al curbei, ţinând seamă că $y = f(x)$.

Fie dată ecuaţia unei curbe $y = f(x)$. Să admitem că punctul M, pentru care calculăm curbura, are coordonatele x, y. Să dăm lui x, creşterea Δx; valorii $x + \Delta x$ a abscisei îi va corespunde punctul M' al curbei. Să ducem în punctele M şi M' tangentele MT şi $M'T'$ (fig. 107). Dacă însemnăm cu φ unghiul de înclinaţie al tangentei în punctul M, atunci, la trecerea dela punctul M la M', acest unghi va primi creşterea $\Delta\varphi$. Creşterea este deasemenea un unghi de rotaţie al tangentei. Dacă arcul $\overset{\smile}{AM} = s$, atunci arcul $\overset{\smile}{MM'} = \Delta s$. Astfel, obţinem:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Impărţim numărătorul şi numitorul fracţiei prin Δx şi trecem la limită

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\varphi'}{s'}.$$

Pentru s' am determinat expresia $s' = \sqrt{1 + y'^2}$. Derivata φ' o vom calcula în felul următor. Ne este cunoscut că $\operatorname{tg} \varphi = y'$ (§ 54); de unde $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\, y'$. Derivata y' este o funcţie de x, prin urmare, $\operatorname{arctg} y'$ este o funcţie de x. Derivând după x, aflăm :

$$\varphi' = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y''.$$

Inlocuind pe s' şi φ' în expresia pentru curbură, obţinem :

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (7)$$

Astfel am atins ţinta noastră de a obţine o formulă care să permită calcularea lui K, fiind dată funcţia $y = f(x)$ şi valoarea lui x.

Să observăm că (presupunând că la numitor se ia totdeauna semnul $+$ în faţa radicalului) curbura poate fi pozitivă sau negativă după semnul lui y''. Aceasta arată că curbura este pozitivă în punctele în care curbura este convexă şi negativă în punctele în care curbura este concavă.

O b s e r v a ţ i e. Am aflat mai înainte că curbura medie a unui cerc este constantă pentru orice punct şi egală cu inversa razei R a cercului. Intrucât curbura într'un punct este limita curburii medii, rezultă că curbura în fiecare punct al cercului este deasemenea constantă şi egală cu $\frac{1}{R}$. Dacă am calcula curbura arcului după formula (7), am afla că pentru punctele cercului, situate deasupra axei Ox, curbura este egală cu $-\frac{1}{R}$, iar pentru punctele situate sub axa Ox, cu $+\frac{1}{R}$. Deosebirea de semn indică diferenţa în orientarea concavităţii jumătăţii inferioare şi a celei superioare a cercului. Această deosebire a apărut datorită introducerii sistemului de coordonate.

§ 87. Cercul de curbură şi raza de curbură

Se dă o curbă oarecare AB, având în punctul M curbura K, (fig. 108). Ducem tangenta şi normala la curbă în punctul M. Vom duce acum prin punctul M cercuri cu centrele situate pe normală în concavitatea curbei. Toate aceste cercuri au aceeaşi tangentă ca şi

curba AB în punctul M şi au concavitatea lor în vecinătatea acestui punct, la fel orientată ca şi curba. Printre aceste cercuri se va găsi unul care va avea aceeaşi curbură K, ca şi curba în punctul M. Din relaţia dintre curbura cercului şi raza lui (§ 86) rezultă că raza cercului vizat trebue să fie egală cu valoarea absolută a lui $\frac{1}{K}$.

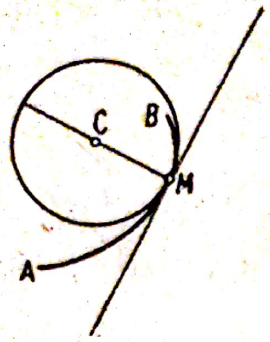

Fig. 108.

Cercul construit în felul acesta poartă denumirea de *cerc de curbură* al curbei în punctul M. Inversa mărimii curburii curbei în punctul M, adică mărimea $R = \frac{1}{K}$, se numeşte *rază de curbură*, iar centrul C al cercului de curbură se numeşte *centrul de curbură* al curbei în punctul M.

La fel după cum tangenta caracterizează înclinaţia curbei într'un punct dat al ei, tot astfel cercul de curbură dă o reprezentare intuitivă a gradului de curbură al curbei în punctul respectiv. Circumferinţa cercului de curbură aderă mai intim la curbă decât oricare alt cerc, care atinge curba în punctul M şi într'o mică porţiune, în apropierea punctului M, reproduce curba cu un mare grad de precizie.

Formula pentru calcularea razei de curbură se obţine foarte simplu din egalitatea :

$$R = \frac{1}{K}.$$

Cum

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

urmează că :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \qquad (8)$$

§ 88. Exemple de calculare a razei de curbură

1. Să se afle raza de curbură a hiperbolei echilatere $xy = 12$ în punctul (3, 4).

Rezolvare. $y = \frac{12}{x}$; $y' = -\frac{12}{x^2}$; $y'' = \frac{24}{x^3}$. Pentru $x = 3$ valorile derivatei întâi şi a doua sunt :

$$y' = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}, \; y'' = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}.$$

Prin urmare :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{16}{9}\right)^{3/2}}{\frac{8}{9}} = \frac{125}{24}.$$

2. Să se afle raza de curbură a elipsei :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

în punctul $(0, b)$.

Rezolvare. Derivăm în raport cu x cele două părţi ale ecuaţiei elipsei, considerând pe y ca o funcţie de x, iar puterea y^2 ca o funcţie de funcţie de x. Vom obţine :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0;$$

de aici determinăm derivata y' :

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Derivăm şi această egalitate în raport cu x, ţinând minte că y este o funcţie de x:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Inlocuind aici valoarea obţinută pentru y', obţinem :

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + \frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

deoarece

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Prin urmare,

$$R = \frac{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{3/2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}.$$

In punctul $(0, b)$, adică $x = 0$, $y = b$, obţinem :

$$R = -\frac{a^2}{b},$$

3. Să se afle raza de curbură într'un punct oarecare al lănţişorului (fig. 109):

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^{*})$$

Rezolvare.

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ şi } \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}$$

Derivând şi derivata întâi, obţinem:

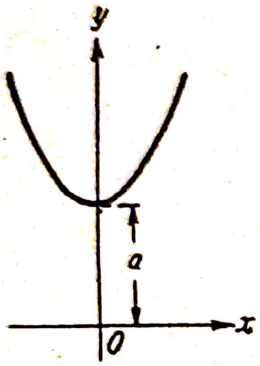

Fig. 109.

$$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y^2}{a}.$$

Prin urmare,

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

4. Să se afle raza de curbură a cicloidei **):

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

într'un punct oarecare.

Rezolvare. In formula razei de curbură intră derivata întâi şi a doua în raport cu variabila x a coordonatei y a curbei. In ecuaţiile parametrice ale cicloidei (comp. § 29) coordonatele x şi y sunt funcţii ale parametrului t. Insă, având relaţia dintre x şi t, putem considera t ca o funcţie de x. Ţinând seama de aceasta, vom deriva pe y în raport cu x, considerând expresia $(1 - \cos t)$ ca o funcţie de funcţie de x. Astfel obţinem:

$$y' = a \sin t \cdot t'.$$

---

*) Un fir flexibil, inextensibil, suspendat la cele două capete ale lui ia forma curbei reprezentate prin această ecuaţie.

**) Cicloidă se numeşte curba pe care o descrie un punct situat pe circumferinţa unui cerc, care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă fixă.

Fie a raza cercului. Să facem să coincidă axa Ox cu dreapta, pe care se rostogoleşte cercul. Vom considera drept origine poziţia iniţială a punctului circumferinţei, care descrie curba. Să considerăm o poziţie oarecare intermediară a cercului care se rostogoleşte (fig. 110). Notăm cu P punctul care descrie curba şi cu M punctul de tangenţă al cercului cu axa Ox. Evident că arcul MP este egal cu segmentul OM. Notând cu t unghiul PCM, obţinem:

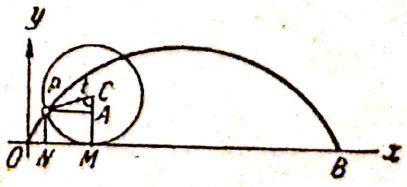

Fig. 110.

$$x = OM - NM = at - a \sin t = a(t - \sin t)$$
$$y = PN = MC - AC = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Derivăm ecuația $x = a(t - \sin t)$ în raport cu x și aflăm :

$$1 = a(1 - \cos t) \cdot t', \text{ de unde } t' = \frac{1}{a(1 - \cos t)}.$$

Înlocuind expresia aceasta în formula care definește pe y', obținem :

$$y' = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Derivăm acum pe y' în raport cu x și aflăm derivata a doua y'' :

$$y'' = -\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{t'}{2}.$$

Cum

$$t' = \frac{1}{a(1 - \cos t)} = \frac{1}{2a \sin^2 \frac{t}{2}}, \text{ vom avea :}$$

$$y'' = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Prin urmare,

$$R = -\frac{\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}} = -4a \sin \frac{t}{2}.$$

Exerciții

La § 83.

Să se afle diferențialele următoarelor funcții :

1. $y = 2x^3$. R : $dy = 6x^2\,dx$.
2. $y = \sqrt{x}$. R : $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
3. $y = 3x^2 - 6x$. R : $dy = 6(x - 1)\,dx$.
4. $y = 3x^2 + \frac{1}{x}$. R : $dy = \left(6x - \frac{1}{x^2}\right) dx$.
5. $y = (x^3 - a)^2$. R : $dy = 6x^2(x^3 - a)\,dx$.
6. $y = ax^3 - bx^2 + cx + d$. R : $dy = (3ax^2 - 2bx + c)\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

7. $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-1} + 5$. **R**: $dy = (5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-2})\,dx$.

8. $y = (a^2 - x^2)^4$. **R**: $dy = -8x(a^2 - x^2)^3\,dx$.

9. $y = \ln\sqrt{1 - x^3}$. **R**: $dy = \dfrac{3x^2\,dx}{2(x^3 - 1)}$.

10. $y = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$. **R**: $dy = 2\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)dx$.

La § 84.

11. Să se calculeze creşterea şi diferenţiala funcţiei $y = 2x^2 - x$ la trecerea dela valoarea $x = 1$ la valoarea $x = 1{,}01$.

R: $\Delta y = 0{,}0302$; $dy = 0{,}03$.

12. Să se calculeze creşterea şi diferenţiala funcţiei $y = x^3 + 2x$ la trecerea dela valoarea $x = -1$ la valoarea $x = -0{,}98$.

R: $\Delta y = 0{,}098808$; $dy = 0{,}1$.

13. Să se calculeze creşterea şi diferenţiala funcţiei $y = x^3 - 5x^2 + 80$ la trecerea variabilei x dela valoarea $x = 4$ la valoarea $x = 4{,}001$.

R: $\Delta y = 0{,}008007001$; $dy = 0{,}008$.

14. Perioada de oscilaţie a unui pendul se exprimă prin formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

unde l este lungimea pendulului şi g acceleraţia forţei gravităţii. Să se afle eroarea maximă relativă a pendulului, condiţionată de eroarea maximă δl, intervenită la măsurarea lungimii l a pendulului:

R: $\dfrac{\delta T}{T} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta l}{l}$.

15. Latura unui pătrat, măsurată cu precizia de 0,1 m, este egală cu 4,2 m. Care vor fi erorile maxime, absolută şi relativă, la calculul ariei pătratului?

R: 0,84 m²; rotunjit, 4,8 %.

16. Aceeaşi problemă ca cea precedentă pentru volumul unui cub ca latura 4,2 m.

R: 5,292 m³; rotunjit, 7,1 %.

17. Să se afle valoarea aproximativă a funcţiei:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \text{ pentru } x = 4{,}2.$$

R: 0,8144.

Indicaţie. Se va calcula mai întâi diferenţiala fracţiei pentru $x = 4$ şi $dx = 0{,}2$. Valoarea cu aproximaţie a fracţiei o obţinem adunând valoarea ei pentru $x = 4$ cu diferenţiala calculată.

Scanned with OKEN Scanner

18. Să se afle valoarea aproximativă a fracției :

$$\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}},$$

pentru $x = 0{,}3$.

R : 0,7.

19. Știind că lg 200 = 2,30103, să se afle lg 200,4. Să se compare rezultatul obținut cu datele tabelei de logaritmi (Modulul $\mu = \lg e = 0{,}43429$).

R : lg 200,4 = 2,30190. Această valoare coincide cu cea din tabelele de logaritmi cu 5 zecimale.

Indicație. Să presupunem $y = \lg x$. Atunci :

$$\lg(x + \Delta x) = y + \Delta y \approx y + dy = \lg x + d(\lg x) = \lg x + \frac{1}{x} \lg e \, dx.$$

Să se arate că pentru valori mici, în valoare absolută, a lui h, sunt valabile următoarele formule de aproximație :

20. $e^h \approx 1 + h$.

21. $\operatorname{tg} h \approx h$.

22. $\arcsin h \approx h$.

23. $\operatorname{arctg} 2h \approx 2h$.

24. $\ln\left(1 + \sqrt{h}\right) \approx \sqrt{h}$.

25. Să se demonstreze că pentru valori mici în valoare absolută date lui α, este valabilă următoarea formulă de aproximație :

$$\ln(1 + \sin\alpha) \approx \alpha.$$

La §§ 86 și 87.

26. Să se afle curbura și raza de curbură a parabolei $y^2 = 4x$ în punctul (4, 4).

R : $-\frac{1}{10\sqrt{5}}$, $-10\sqrt{5}$.

27. Să se afle curbura și raza de curbură în punctul (4, 3) al hiperbolei echilatere $xy = 12$.

R : $\frac{24}{125}$ și $\frac{125}{24}$.

28. Să se afle raza de curbură a curbei $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ în punctul (0, 0).

R : $R = -\frac{1}{36}$.

29. Să se afle raza de curbură a hiperbolei $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$: *a*) într'un punct oarecare ; *b*) în punctul $(a, 0)$.

R : *a*) $R = -\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$; *b*) $R = -\frac{b^2}{a}$.

30. În care punct, curba $y = e^x$ are raza de curbură cea mai mică?

R: $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

31. În care punct, curba $y = \ln x$ are raza de curbură cea mai mică în valoare absolută?

R: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

32. Să se afle raza de curbură a curbei $x = t^2$, $y = t^3$ în punctul $(1, 1)$.

R: $\frac{13\sqrt{13}}{6}$.

33. Să se arate că în orice punct al cicloidei:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t),$$

punctul de contact al cercului rostogolitor cu axa absciselor, împarte raza de curbură în două părţi egale.

34. Să se arate că raza de curbură într'un punct oarecare (x, y) al curbei $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ este egală cu de trei ori lungimea perpendicularei coborîte din origine pe tangenta dusă la curbă în punctul (x, y) (adică în punctul în care se consideră raza de curbură).

PARTEA A TREIA

ELEMENTELE CALCULULUI INTEGRAL

CAPITOLUL IX

INTEGRALA NEDEFINITĂ

§ 89. Integrarea ca operaţie inversă diferenţierii. Integrala nedefinită

Din matematica elementară cititorul cunoaşte împărţirea operaţiilor în *directe şi inverse.* Astfel, operaţii directe, adunarea, îi corespunde operaţia inversă scăderea; operaţii înmulţire, împărţirea; ridicării la o putere îi corespund două operaţiuni inverse: extragerea rădăcinii şi logaritmarea.

Unul din scopurile calculului integral este învăţarea operaţiunii inverse operaţiunii diferenţierii.

Operaţia diferenţierii are drept scop aflarea diferenţialei $dF(x)=f(x)\,dx$ sau a derivatei $F'(x) = f(x)$ pentru o funcţie dată $F(x)$.

Calculul integral îşi pune problema să studieze operaţiunea inversă. Această operaţiune se numeşte integrare şi are următorul scop: *fiind dată o expresie* $f(x)\,dx$, *considerată ca diferenţiala unei funcţii necunoscute* $F(x)$, *să se afle această funcţie necunoscută „primitivă"* $F(x)$.

Am introdus un termen nou: funcţie „primitivă". Definiţia exactă a acestei noţiuni este următoarea:

Se numeşte funcţie primitivă a unei expresii date $f(x)dx$ *orice funcţie* $F(x)$, *a cărei diferenţială este* $f(x)\,dx$, *sau, ceeace este acelaşi lucru, a cărei derivată este egală cu funcţia dată* $f(x)$.

Astfel, între expresia $f(x)dx$ şi funcţia ei primitivă $F(x)$, există relaţia

$$dF(x) = f(x)\,dx,$$

sau:

$$F'(x) = f(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru notarea operaţiunii directe, diferenţierea, se întrebuinţează semnul d, astfel că simbolul

$$dF(x)$$

înseamnă cum ştim, diferenţiala funcţiei $F(x)$.

Pentru notarea operaţiunii inverse, integrarea, se întrebuinţează semnul $\int$; astfel, simbolul

$$\int f(x)\,dx$$

înseamnă *că pe expresia* $f(x)\,dx$ *se efectuează operaţia inversă diferenţierii.*

Acest simbol:

$$\int f(x)\,dx$$

se numeşte *integrală nedefinită* şi se citeşte astfel: „integrala nedefinită a lui $f(x)\,dx$".

De exemplu, integrala nedefinită a expresiei $x^3\,dx$ se scrie:

$$\int x^3\,dx.$$

Faptul că simbolul introdus se numeşte integrală nedefinită, se explică prin multiplicitatea (adică nedeterminarea) soluţiilor, de care este afectată operaţiunea integrării.

Un asemenea fapt cititorul l-a întâlnit mai înainte, de exemplu, la învăţarea extragerii rădăcinii pătrate. Astfel, $\sqrt{4} = \pm 2$, fiindcă $(+2)^2 = 4$ şi $(-2)^2 = 4$.

Integrarea duce la un rezultat analog.

Pentru a înţelege mai uşor, să analizăm mai întâi problema pe baza unui exemplu.

Să luăm un număr de funcţii:

$$y = \frac{x^3}{3},\ y = \frac{x^3}{3} + 1,\ y = \frac{x^3}{3} + 2,\ y = \frac{x^3}{3} + 3,\ y = \frac{x^3}{3} - 1,\ \text{etc.}$$

Pentru toate aceste funcţii $y' = x^2$, întrucât ele se deosebesc prin termeni constanţi, ale căror derivate sunt egale cu zero.

Dacă construim graficele acestor funcţii, obţinem un număr de curbe, reprezentate în fig. 111.

Tangentele la aceste curbe, duse în punctele care au aceeaşi valoare a abscisei x, sunt înclinate faţă de axa Ox cu acelaşi unghi al cărui tangentă este $y' = x^2$ (§ 54).

Toate aceste curbe se obţin prin deplasarea curbei $y = \frac{x^3}{3}$ în direcţie verticală. Astfel, curba $y = \frac{x^3}{3} + 1$ poate fi obţinută

prin mişcarea curbei $y = \frac{x^3}{3}$ cu o unitate de lungime în direcţia pozitivă a axei Oy; curba $y = \frac{x^3}{3} + 2$ este aceeaşi curbă ca şi $y = \frac{x^3}{3}$, însă deplasată cu două unităţi de lungime în aceeaşi direcţie; curba $y = \frac{x^3}{2} - 1$ o obţinem, lăsând curba $y = \frac{x^3}{3}$ cu o unitate de lungime în jos. De-aceea este evident că înclinarea tangentelor la aceste curbe în punctele care au aceeaşi abscisă x, trebue să fie aceeaşi pentru toate tangentele.

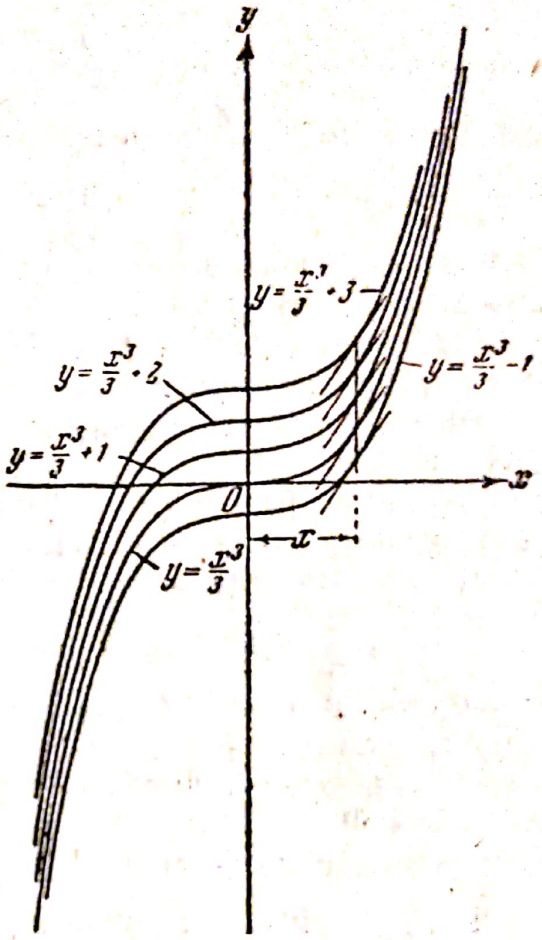

Fig. 111.

Desigur, acest fapt va avea loc pentru toate curbele de forma $y = \frac{x^3}{3} + C$, unde C este un număr oarecare (pentru prima curbă $C = 0$, pentru a doua $C = 1$, etc).

Dacă punem problema inversă: să se stabilească curba primitivă, fiind dată derivata $y' = x^2$, atunci, evident, nu vom putea răspunde care din liniile $y = \frac{x^3}{3} + C$ a fost dată iniţial. Toate funcţiile de forma $y = \frac{x^3}{3} + C$, care exprimă aceste curbe, satisfac condiţia $y' = x^2$ sau $dy = x^2\,dx$.

In termenii stabiliţi de noi, acest rezultat înseamnă că problema aflării integralei nedefinite a expresiei $x^2\,dx$ nu va avea o soluţie definită, fiindcă orice funcţie de forma $\frac{x^3}{3} + C$, unde C poate fi orice număr, poate servi drept soluţie.

Deaceea trebue să scriem astfel :

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

şi să reţinem că rezultatul $\frac{x^3}{3} + C$ este o prezentare prescurtată a unui număr infinit de răspunsuri, întrucât prin litera C putem subînţelege orice număr (1, 2, 3, 10, 50, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\sqrt{2}$, 1, 0, —1 etc). Deoarece nu am aflat o singură soluţie definită însuşi, simbolul $\int x^2\,dx$ se numeşte integrală nedefinită.

Se vede imediat că vom obţine un astfel de rezultat la aflarea funcţiei primitive a oricărei funcţii $f(x)$.

In adevăr, să presupunem că funcţia $F(x)$ este o funcţie primitivă determinată pentru $f(x)$, adică o astfel de funcţie, încât $dF(x) = f(x)\,dx$ [sau $F'(x) = f(x)$] ; atunci şi orice sumă $F(x) + C$, C fiind o constantă oarecare, va fi deasemenea o funcţie primitivă pentru $f(x)$, fiindcă diferenţiala unei constante este egală cu zero şi deci :

$$d(F(x) + C) = dF(x) + dC = f(x)\,dx.$$

Expresia $F(x) + C$ cuprinde toate funcţiile primitive pentru $f(x)\,dx$. Această afirmaţie se justifică prin următoarele considerente.

Să admitem că, $\Phi(x)$ este deasemenea o funcţie primitivă pentru $f(x)$, adică $\Phi'(x) = f(x)$. Atunci diferenţa $\Phi(x) - F(x) = \Psi(x)$ are derivata identic egală cu zero, întrucât

$$\Psi'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Insă funcţia $\Psi(x)$, a cărei derivată $\Psi'(x)$ este egală cu zero pentru orice valoare x, trebue să fie reprezentată printr'o curbă, pentru care tangenta în fiecare punct este paralelă cu axa Ox, adică însăşi funcţia trebue să aibă o singură valoare numerică pentru toate valorile x, să fie o mărime constantă. In adevăr, dacă nu ar fi aşa, ordonatele, care reprezintă valorile lui $\Psi(x)$, ar avea lungimi diferite pentru valori diferite x; atunci curba s'ar ridica sau ar coborî în anumite porţiuni şi tangenta, evident, nu ar putea rămâne tot timpul paralelă cu axa absciselor.

Prin urmare, diferenţa între două funcţii primitive oarecare $F(x)$ şi $\Phi(x)$ ale expresiei $f(x)\,dx$ este o mărime constantă, adică

$$\Phi(x) - F(x) = \text{const.} = C_1.$$

De aici urmează că

$$\Phi(x) = F(x) + C_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum două funcţii primitive pentru $f(x)\,dx$ se deosebesc între ele numai printr'un termen constant, atunci, luând una din ele, de exemplu $F(x)$, vom obţine oricare altă funcţie primitivă, adunând la $F(x)$ un număr corespunzător C_1. Prin urmare, expresia

$$F(x) + C,$$

în care înţelegem prin C orice număr, reprezintă în adevăr *totalitatea* funcţiilor primitive pentru $f(x)\,dx$.

Astfel, chiar din semnificaţia simbolului integralei nedefinite, avem următoarea egalitate fundamentală :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (1)$$

unde $F(x)$ este o funcţie primitivă determinată pentru $f(x)\,dx$, indiferent care, iar C o constantă arbitrară.

Cum în partea stângă a egalităţii (1) nu este scrisă constanta arbitrară C, trebue, când scriem simbolul

$$\int f(x)\,dx,$$

să înţelegem că această constantă este cuprinsă în mod implicit în simbolul integralei nedefinite şi să ţinem minte că acest simbol exprimă un număr infinit de funcţii primitive.

Exemple :

1. Dacă $F(x)=x^3$, atunci $dF(x)=3x^2\,dx$. Deaceea avem după formula (1) :
$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$
2. Dacă $F(x) = \sin x$, atunci $F'(x) = \cos x$. Deaceea
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$
3. Dacă $F(x) = e^x$, atunci $F'(x) = e^x$, prin urmare,
$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

§ 90. Proprietăţile integralei nedefinite, care rezultă direct din definiţia ei

După definiţia integralei avem :

1. $[\int f(x)\,dx]' = f(x)$.
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
3. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$,

sau, cum $F'(x)\,dx = dF(x)$

4. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Proprietatea 2 arată că semnul d anulează semul $\int$, iar din proprietatea 4 rezultă că semnul $\int$ anulează deasemenea semnul d, însă în acest caz trebue să adăugăm o constantă arbitrară la $F(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

5. *Un factor constant din expresia de sub integrală poate fi scos înaintea semnului integralei.*

Această proprietate poate fi exprimată prin egalitatea

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x) dx,$$

unde c este o mărime constantă. Desigur, trebue să reţinem că *egalitatea a două integrale nedefinite este o egalitate cu aproximaţia unei constante arbitrare.*

Demonstraţie. După definiţia integralei avem :

$$\left[\int c\, f(x) dx\right]' = c\, f(x), \quad \left[c \int f(x)\, dx\right]' = c \left[\int f(x)\, dx\right]' = c\, f(x).$$

Prin urmare,

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx.$$

Exemplu.

$$\int \frac{\cos x}{5} dx = \int \frac{1}{5} \cos x\, dx = \frac{1}{5} \int \cos x\, dx = \frac{1}{5} \sin x + C.$$

6. *Integrala unei sume algebrice de funcţii este egală cu suma algebrică a integralelor fiecărei funcţii în parte (şi invers).*

Limitându-ne la o sumă cu trei termeni, putem exprima această proprietate sub forma următoarei formule :

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int \varphi(x)\, dx - \int \psi(x)\, dx.$$

Demonstraţie. Luând derivatele ambelor părţi ale acestei egalităţi, obţinem :

$$\{\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\, dx\}' = f(x) + \varphi(x) - \psi(x);$$
$$\left[\int f(x)\, dx + \int \varphi(x)\, dx - \int \psi(x)\, dx\right]' = \left[\int f(x)\, dx\right]' +$$
$$+ \left[\int \varphi(x)\, dx\right]' - \left[\int \psi(x)\, dx\right]' = f(x) + \varphi(x) - \psi(x).$$

Prin urmare,

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int \varphi(x)\, dx - \int \psi(x)\, dx.$$

Exemplu.

$$\int (3x^2 + 4 \cos x - a^x) dx = 3 \int x^2\, dx + 4 \int \cos x\, dx - \int a^x\, dx = x^3 +$$
$$+ 4 \sin x - \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

§91. Formule fundamentale de integrare

Efectuarea oricărei operaţiuni inverse se reduce, în fond, la intuirea şi verificarea rezultatului cu ajutorul operaţiunii directe. Regulile operaţiunilor inverse constau în reducerea formulelor complicate la cele mai simple. Astfel, de exemplu, la împărţirea numerelor cu

mai multe cifre, reducem intuirea complicată la alta mai simplă prin despărţirea unui anumit număr de cifre ale deîmpărţitului ; totuşi, şi la această formă mai simplă, facem deseori greşeli, luând o cifră neexactă la cât.

In mod analog integrarea nedefinită, adică operaţia inversă diferenţierii, este în fond un procedeu de încercări îndreptate către un anumit scop. Pentru uşurarea procedeului de integrare, s'au întocmit tabele cu formulele fundamentale, care reprezintă inversarea formulelor fundamentale de diferenţiere. Pentru a afla o integrală oarecare, o comparăm cu aceste formule şi dacă constatăm că ea este identică cu una din ele, am aflat integrala. Dacă integrala dată nu este identică cu niciuna din aceste formule, ne străduim să o aducem la una din ele prin transformări diferite. Aceste metode de reducere a unei integrale date la o integrală cuprinsă în tabele sunt în general foarte dificile şi cer o îndemânare mare, care poate fi dobândită numai prin practică.

Cum am spus, formulele fundamentale de integrare au fost întocmite prin inversarea formulelor calculului diferenţial şi pot fi uşor verificate prin operaţia directă, adică prin diferenţiere, ceeace propunem elevilor să facă.

Dăm tabela formulelor fundamentale :

I. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$; pentru $n = -1$, formula îşi pierde sensul : $n+1 = -1+1=0$, iar o împărţire prin zero nu se poate face).

II. $\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} \, dx = \ln x + C.$

III. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

IV. $\int e^x \, dx = e^x + C.$

V. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

VI. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Scanned with OKEN Scanner

§ 92. Metodele cele mai simple de integrare

1. In acest paragraf, vom arăta prin exemple metodele cele mai simple de integrare.

Exemple

1. $\int(x^3+5x^2-7x+3)\,dx.$

Rezolvare $\int(x^3+5x^2-7x+3)\,dx=\int x^3\,dx+5\int x^2\,dx-7\int x\,dx+$

$+3\int dx=$ (conform proprietăților 6 și 5 § 91)=

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-7\frac{x^2}{2}+3x+C$$ [după formula (1)].

2. $$\int\left(ax^2+bx+\frac{c}{x}+\frac{e}{x^2}\right)dx=a\int x^2\,dx+b\int x\,dx+$$

$$+c\int\frac{dx}{x}+e\int\frac{dx}{x^2}=$$ (conform proprietăților 6 și 5 § 91.)

$$=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+c\ln x+e\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$ [după formulele (I) și (II)].

$$=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+c\ln x-\frac{e}{x}+C.$$

3. $$\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx=$$

$$=2a\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx-b\int x^{-2}\,dx+3c\int x^{\frac{2}{3}}\,dx=$$

$$=2a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-b\frac{x^{-1}}{-1}+3c\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=$$ [după formula (I)]

$$=4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}}+C.$$

4. $$\int(x^2+2)\,x\,dx=\int(x^3+2x)\,dx=\int x^3\,dx+2\int x\,dx=\frac{x^4}{4}+x^2+C.$$

2. *Integrarea prin metoda schimbării variabilei* (*metoda substituției*). In exemplele tratate am aplicat la aflarea integralelor numai regula pentru integrarea sumei și tabela integralelor celor mai simple.

In felul acesta se poate integra însă numai într'un număr foarte limitat de cazuri. Să cercetăm acum încă o metodă de integrare, *integrarea prin schimbarea variabilei*. Această metodă are o aplicare largă în tehnica integrării.

Esența acestei metode constă în faptul că la aflarea integralei $\int f(x)\,dx$ se introduce în locul variabilei x o nouă variabilă t, legată de x prin relația $x = \varphi(t)$, cu scopul de a obține o expresie mai simplă sub semnul integrală. Prin aceasta, integrala dată $\int f(x)\,dx$ se transformă în integrala $\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$. Astfel, obținem relația :

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{2}$$

[toate funcțiile din relația (2) se consideră continue].

Exactitatea formulei (2) se demonstrează în felul următor :

Fie :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3}$$

însemnăm :

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t) = \Psi(t), \tag{4}$$

și fie :

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int \Psi(t)\,dt = \Phi(t) + C. \tag{5}$$

Diferențiem integrala (3) după variabila t; cum $x = \varphi(t)$, $F(x)$ este o funcție compusă de t și deaceea :

$$[\int f(x)\,dx]'_t = F'(x) \cdot x'_t.$$

Funcția $F(x)$ este funcția primitivă pentru $f(x)$; deaceea :

$$F'(x) = f(x) \text{ și, prin urmare,}$$

$$[\int f(x)\,dx]'_t = f(x) \cdot x'_t = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t). \tag{6}$$

Diferențiind acum integrala (5) după variabila t, aflăm :

$$[\int \Psi(t)\,dt]'_t = \Phi'(t) = \Psi(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Comparând acest rezultat cu (6), tragem concluzia că derivatele integralelor (3) și (5) sunt egale. Prin urmare,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Se cere, de exemplu, să calculăm integrala $\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$. Punem $x = \operatorname{tg} t$, unde t este variabila nouă. Aici $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ și $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$.

Prin urmare,

$$f([\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{\cos^3 t\,dt}{\cos^2 t} = \cos t\,dt$$

şi, în virtutea relaţiei (2), obţinem :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \cos t\,dt = \sin t + C.$$

Rezultatul obţinut trebue să fie exprimat prin variabila veche. Cum $x = \operatorname{tg} t$, trebue în acest scop să exprimăm $\sin t$ prin $\operatorname{tg} t$ şi să înlocuim apoi $\operatorname{tg} t$ prin x. Vom avea :

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

şi în fine aflăm :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Dacă $x = \varphi(t)$, atunci $\varphi'(t)\,dt = dx$. Deaceea în practică vom calcula expresia $f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ prin părţi : separat $f[\varphi(t)]$ şi separat $\varphi'(t)\,dt = dx$.

Vom arăta aceasta din exemplul următor.

Să se afle integrala $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Inlocuind pe x cu noua variabilă t prin intermediul relaţiei $x = a \sin t$. Vom avea :

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a\cos t, \qquad dx = a\cos t\,dt.$$

Obţinem, prin urmare :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt.$$

Integrala $\int \cos^2 t\,dt$ se calculează cu ajutorul cunoscutei formule din trigonometrie : $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$. Astfel, aflăm :

$$a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right).$$

Prima integrală se calculează direct :

$$\int dt = t + C_1.$$

Pentru aflarea integralei a doua folosim substituția $t = \frac{1}{2} u$.

Atunci $dt = \frac{1}{2} du$ și

$$\int \cos 2t \, dt = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u + C_2 = \frac{1}{2} \sin 2t + C_2.$$

Prin urmare,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

(suma constantelor $C_1 + C_2$, înmulțită cu $\frac{a^2}{2}$ o înlocuim printr'o constantă arbitrară C).

Din relația $x = a \sin t$ aflăm :

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad t = \arcsin \frac{x}{a},$$

și în fine obținem :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Trebue să observăm că, în forma expusă, metoda substituției se aplică relativ rar, din cauza dificultății de a nimeri o astfel de funcție de t care, înlocuind pe x, să realizeze o simplificare a expresiei de sub integrală. Deobicei se procedează invers, introducând noua variabilă t ca o funcție oarecare a celei vechi x : $t = \psi(x)$.

Să aplicăm cele expuse printr'un exemplu.

Se cere să se afle :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}.$$

Facem substituția $\cos x = t$; de unde : $-\sin x \, dx = dt$ sau $\sin x \, dx = -dt$ și

$$\frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\frac{dt}{t}.$$

Astfel aflăm :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C.$$

Înlocuind invers pe t cu $\cos x$, obținem rezultatul final :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x + C.$$

Să analizăm încă câteva exemple de aplicare a metodei substituției.

Exemple

1. $\int \sqrt{x+a} \, dx$. Punem $x + a = t$; deci $dx = dt$ și

$$\int \sqrt{x+a} \, dx = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{a+x}$. Punând $a + x = t$, obținem : $dx = dt$,

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln (a+x) + C.$$

3. $\int \frac{dx}{a-x}$. Punând $a - x = t$, aflăm : $dx = -dt$,

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln (a-x) + C.$$

4. $\int e^{2x} dx$. Punem $2x = t$; iar $dx = \frac{dt}{2}$; deci,

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Punem $a^2+x^2=t$; atunci $2x\,dx=dt$ şi

$x\,dx=\frac{dt}{2}$; prin urmare,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=t^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

6. $\int \frac{5x^2\,dx}{x^3+15}$ Punem $x^3+15=t$; deci $3x^2\,dx=dt$ şi $x^2\,dx=\frac{dt}{3}$;

prin urmare,

$$\int \frac{5x^2\,dx}{x^3+15}=\int \frac{5\,\frac{dt}{3}}{t}=\frac{5}{3}\int \frac{dt}{t}=\frac{5}{3}\ln t+C=$$

$$=\frac{5}{3}\ln (x^3+15)+C.$$

7. $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}$ Punem $\ln x=t$; atunci $\frac{dx}{x}=dt$; prin urmare,

$$\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C.$$

8. $\int (a^{nx}-e^{mx})\,dx=\int a^{nx}\,dx-\int e^{mx}\,dx$. Pentru aflarea primei intgrale punem: $nx=t$, deci $n\,dx=dt$ şi $dx=\frac{dt}{n}$.

Pentru aflarea integralei a doua, facem substituţia $mx=z$; şi $dx=\frac{dz}{m}$; prin urmare,

$$\int (a^{nx}-e^{mx})\,dx=\int a^t\frac{dt}{n}-\int e^z\frac{dz}{m}=\frac{1}{n}\frac{a^t}{\ln a}-\frac{1}{m}e^z+C=$$

$$=\frac{a^{nx}}{n\ln a}-\frac{e^{mx}}{m}+C.$$

9. $\int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}$. Punem $a+b\cos x=t$; atunci $-b\sin x\,dx=dt$ şi $\sin x\,dx=-\frac{dt}{b}$; prin urmare,

$$\int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x) + C.$$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3}$. Punem $x^3 = t$; deci $x^2\,dx = \frac{dt}{3}$; prin urmare,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + C.$$

[conform formulei (VII)]

11. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.

Această integrală se reduce la integrala X (v. § 91) cu ajutorul următoarelor transformări:

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2+1}$$

Punem $\frac{2}{3}x = t$; atunci $dx = \frac{3}{2}dt$; prin urmare,

$$\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2+1} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x + C.$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

Această integrală se reduce la integrala IX:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}x\right)^2}}$$

Punem $\frac{3}{4}x = t$; atunci $dx = \frac{4}{3}dt$; prin urmare,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3}\arcsin t = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4}x + C.$$

13. $\int \cos^2 x \sin x\,dx$. Punem $\cos x = t$; atunci $\sin x\,dx = -dt$; prin urmare

$$\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

14. $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x\, dx =$

$$= \int \sin x\, dx - \int \cos x \sin x\, dx.$$

Prima integrală se află în tabelă. Pentru a calcula integrala a doua (v. ex. 13), punem $\cos x = t$; atunci $\sin x\, dx = -dt$; prin urmare,

$$\int \sin x\, dx - \int \cos^2 x \sin x\, dx = -\cos x + \int t^2\, dt = -\cos x +$$

$$+ \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

În încheiere relevăm că este imposibil să dăm reguli generale, după care să ne călăuzim la alegerea unei substituții potrivite pentru o integrală dată. Numai prin exerciții se poate dobândi priceperea necesară în folosirea metodei schimbării de variabilă.

§ 93. Determinarea constantei de integrare pe baza condițiilor inițiale

În § 89 am arătat că la rezolvarea problemei inverse problemei diferențierii, obținem un număr infinit de răspunsuri, care se deosebesc între ele prin valoarea unei constante arbitrare. Astfel, dacă se dă o funcție $f(x)$ și trebue aflată funcția care satisface numai condiția ca derivata să fie egală cu funcția dată, atunci rezultatul se scrie sub forma:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

unde $F(x)$ este o funcție, astfel ca $F'(x) = f(x)$, iar C este o constantă oarecare; dând lui C valori diferite, vom obține funcții diferite, care satisfac problema pusă.

Dacă mai adăugăm însă o condiție, vom obține o soluție unică, corespunzătoare unei valori determinate a constantei arbitrare, care rezultă din satisfacerea condiției suplimentare.

Să explicăm cele spuse prin exemple.

Exemplul 1. Să se afle funcția a cărei derivată este $3x^2 - 2x + 5$ și care ia valoarea 12 pentru $x = 1$.

Rezolvare. Din condiția problemei reiese că funcția căutată este o funcție primitivă a expresiei $3x^2 - 2x + 5$. Luând integrala nedefintă a expresiei $3x^2 - -2x + 5$, vom afla mai întâi toate funcțiile primitive:

$$\int (3x^2 - 2x + 5)\, dx = x^3 - x^2 + 5x + C.$$

Din expresia aflată $x^3 - x^2 + 5x + C$, care cuprinde toate funcțiile primitive, vom afla acum funcția primitivă căutată. Această funcție corespunde unei valori determinate a constantei de integrare C, pe care o aflăm din condiția a doua a problemei. Cum valoarea funcției primitive căutate este egală cu 12 pentru $x = 1$, trebue să avem:

$$1^3 - 1^2 + 5 + C = 12,$$

de unde vom determina valoarea căutată a constantei C, și anume $C = 7$, Deci funcția căutată va fi :

$$x^3 - x^2 + 5x + 7.$$

Exemplul 2. Coeficientul unghiular al tangentei la o curbă în orice punct al ei este egal cu pătratul abscisei punctului, adică cu x^2. Curba trece prin punctul $(3, -1)$. Să se afle ecuația curbei.

Rezolvare. Știm că coeficientul unghiular al tangentei la o curbă în orice punct al ei este derivata ordonatei punctului de abscisă x. Integrând pe x^2, vom afla mai întâi o ecuație, care exprimă cu o constantă arbitrară C toate curbele care satisfac prima condiție a problemei :

$$y = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Din condiția a doua a problemei avem :

$$-1 = 9 + C,$$

de unde $C = -10$. Prin urmare, curba căutată este dată de ecuația :

$$y = \frac{x^3}{3} - 10.$$

Exerciții

La § 89—92

1. $\int x^6 \, dx.$ R : $\frac{x^7}{7} + C.$

2. $\int 4x^5 \, dx.$ R : $\frac{2}{3} x^6 + C.$

3. $\int (1 - 2x) \, dx.$ R : $x - x^2 + C.$

4. $\int (ax + b) \, dx.$ R : $\frac{a}{2} x^2 + bx + C.$

5. $\int (2 - 3u^4) \, du.$ R : $2u - \frac{3}{5} u^5 + C.$

6. $\int (3x^2 - 2x + 1) \, dx.$ R : $x^3 - x^2 + x + C.$

7. $\int (4x^3 + 3x^2 + 4x - 3) \, dx.$ R : $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + C.$

8. $\int (ax^3 + bx^2 + cx + e) \, dx.$ R : $\frac{a}{4} x^4 + \frac{b}{3} x^3 + \frac{c}{2} x^2 + ex + C.$

9. $\int \frac{dx}{x^2}.$ R : $-\frac{1}{x} + C.$

10. $\int \frac{5 \, dt}{t^3}.$ R : $-\frac{5}{2t^2} + C.$

Scanned with OKEN Scanner

11. $\int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) dx.$ R: $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} + C.$

12. $\int \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx.$ R: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$

13. $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2} dx.$ R: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C.$

14. $\int \sqrt{t}\, dt.$ R: $\frac{2}{3} t\sqrt{t} + C,$

15. $\int 2\sqrt[5]{t^3} dt.$ R: $\frac{5}{4} t\sqrt[5]{t^3} + C.$

16. $\int (2u - 3\sqrt{u})\, du.$ R: $u^2 - 2u\sqrt{u} + C.$

17. $\int \frac{dv}{3\sqrt{v}}.$ R: $\frac{2}{3}\sqrt{v} + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$ R: $3\sqrt[3]{x} + C.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}.$ R: $\sqrt{2x} + C.$

20. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt{x}} dx.$ R: $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + 6\sqrt{x} + C.$

21. $\int 7^x dx.$ R: $\frac{7^x}{\ln 7} + C.$

22. $\int (x^3 + 3^x) dx.$ R: $\frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

23. $\int (x^3 - 1)^2 dx.$ R: $\frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x + C.$

24. $\int \left(\frac{2 + x}{x}\right)^2 dx.$ R: $-\frac{4}{x} + 4\ln x + x + C.$

25. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx.$ R: $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

26. $\int \frac{18x^2 - 2}{3x - 1} dx.$ R: $3x^2 + 2x + C.$

27. $\int \frac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} dx.$ R: $2x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$

Scanned with OKEN Scanner

28. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$ — R : $\ln x + 2\operatorname{arctg} x + C$.

29. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$. — R : $2\sin x + C$.

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. — R : $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

31. $\int \cos 5x\,dx$. — R : $\frac{1}{5}\sin 5x + C$.

32. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos 3x\right) dx$. — R : $-2\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

33. $\int (e^x + e^{-x})\,dx$. — R : $e^x - e^{-x} + C$.

34. $\int \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$. — R : $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + C$.

35. $\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$. — R : $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$.

36. $\int (2+3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$. — R : $\frac{2}{15}(2+3x)^{\frac{5}{2}} + C$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$. — R : $\sqrt{2x+1} + C$.

38. $\int \frac{x\,dx}{x^2+3}$. — R : $\frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$.

39. $\int \sqrt{2x^2+1}\; x\,dx$. — R : $\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+1)^3} + C$.

40. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\; x\,dx$. — R : $\frac{1}{3b^2}(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

41. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$. — R : $\sqrt{x^2-2} + C$.

42. $\int \sqrt{2+e^x}\; e^x\,dx$. — R : $\frac{2}{3}(2+e^x)^{\frac{3}{2}} + C$.

43. $\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^3)^{\frac{1}{2}}}$. — R : $\frac{2}{3}\sqrt{a^2+x^3} + C$.

Scanned with OKEN Scanner

44. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+3}$. R: $\ln \sqrt{e^{2x}+3} + C$.

45. $\int e^{x^2} x\,dx$ R: $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

46. $\int e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$. R: $e^{-\frac{1}{x}} + C$.

47. $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$. R: $-e^{\cos x} + C$.

48. $\int \frac{dx}{x \ln x^2}$. R: $\frac{1}{2} \ln \ln x + C$.

49. $\int a^{x^3} x^2\,dx$. R: $\frac{1}{3} \frac{a^{x^3}}{\ln a} + C$.

50. $\int a^x e^x\,dx$. R: $\frac{a^x e^x}{1+\ln a} + C$.

51. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. R: $\ln \sin x + C$.

52. $\int x^2 \sin 3x^3\,dx$. R: $-\frac{1}{9} \cos 3x^3 + C$.

53. $\int x \cos (a + bx^2)\,dx$. R: $\frac{1}{2b} \sin (a + bx^2) + C$.

54. $\int \frac{5\,dx}{\cos^2 bx}$. R: $\frac{5}{b} \operatorname{tg} bx + C$.

55. $\int \frac{dx}{\cos^2 (a - bx)}$. R: $-\frac{1}{b} \operatorname{tg} (a - bx) + C$.

56. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{n}}$. R: $-n \operatorname{ctg} \frac{x}{n} + C$.

57. $\int \frac{dx}{3 + 4x^2}$. R: $\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} + C$.

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}$. R: $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{5} + C$.

59. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$. R: $\frac{7}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{7}}\, x + C$.

Scanned with OKEN Scanner

60. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\sin^2 x}$. R: $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C$.

61. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. R: $\arcsin e^x + C$.

62. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. R: $\arcsin(\ln x)+C$.

63. $\int \sin^2 x \cos x\,dx$. R: $\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

La § 93.

64. Să se afle funcţia, a cărei derivată este $x-3$, ştiind că ea are valoarea 9 pentru $x=2$.

R: $\frac{x^2}{2}-3x+13$.

65. Să se afle funcţia, a cărei derivată este $3+x-5x^2$ şi care are valoarea -200 pentru $x=6$.

R: $124+3x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}$

66. Să se afle funcţia a cărei derivată este $\sin x+\cos x$ şi care are valoarea 2 pentru $x=\frac{\pi}{2}$.

R: $\sin x-\cos x+1$.

67. Să se afle ecuaţia unei curbe, care trece prin punctul (0,1), ştiind că înclinaţia tangentei la curbă este egală cu x în fiecare punct al ei.

R: $y=\frac{x^2}{2}+1$.

68. Să se afle ecuaţia unei curbe, care trece prin punctul $(1,-5)$, ştiind că înclinaţia k a tangentei la curbă în toate punctele ei se determină prin formula $k=1-x$.

R: $y=x-\frac{x^2}{2}-\frac{11}{2}$.

69. Să se afle ecuaţia unei curbe care trece prin punctul $(0,a)$, ştiind că înclinaţia k a tangentei la curbă în fiecare punct al ei se determină prin formula

$$k=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

R : $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

70. Viteza v a unui corp este dată de formula $v = 3t^2 + 4t$ m/s. In timpul $t = 2$ secunde corpul parcurge drumul s, egal cu 16 m. Să se afle legea mișcării corpului.

R : $s = t^3 + 2t^2$.

Indicație. Viteza v este derivata spațiului s în raport cu timpul t.

71. Viteza v a unui corp, este dată de formula $v = 2 \cos t$ m/s. In timpul $t = \frac{\pi}{4}$ secunde corpul parcurge spațiul s, egal cu 10 m. Să se afle legea mișcării.

R : $s = 2 \sin t + 10 - \sqrt{2}$.

72. Accelerația j a unui corp este definită prin formula $j = t^2 + 1$ m/s². In momentul $t = 0$ viteza $v = 1$ m/s și spațiul $s = 0$. Să se afle legea mișcării.

R : $s = \frac{t^4}{12} + \frac{t^2}{2} + t$.

CAPITOLUL X

INTEGRALA DEFINITĂ ȘI APLICAȚIILE EI

§ 94. Interpretarea geometrică a integralei nedefinite

Să presupunem că se dă funcția continuă $y = f(x)$. Fie AB curba care este reprezentarea grafică a funcției date (fig. 112).

Să luăm pe această curbă un punct determinat, însă liber ales, M_0, cu coordonatele $x_0 = OP_0$ și $y_0 = f(x_0) = M_0P_0$. Unei valori oarecare a abscisei $x = OP$ îi va corespunde pe curba AB punctul M, cu ordonata $y = f(x) = MP$. Considerăm aria (haşurată pe figură) cuprinsă între arcul M_0M al curbei AB, ordonatele M_0P_0 și MP și segmentul P_0P al axei absciselor și o notăm cu S. Această arie va varia în funcție de variația abscisei $x = OP$. Deaceea aria S este o funcție de x; să însemnăm această funcție cu $F(x)$, adică,

$$S = F(x).$$

Dând abscisei $x = OP$ creșterea $PP' = \Delta x$, aria $S = F(x)$ va primi creșterea $\Delta S = F(x + \Delta x) - F(x) = PMM'P'$. Din figură se vede că această creștere ΔS este cuprinsă între ariile dreptunghiurilor $PNN'P'$ și $PQQ'P'$, care au drept bază comună segmentul $PP' = \Delta x$; înălțimea primului dreptunghi este ordonata cea mai mare

$f_M(x)$, iar a celui al doilea, ordonata cea mai mică $f_m(x)$ a curbei, dintre toate ordonatele cuprinse în segmentul PP'. Prin urmare, vom avea :

$$\text{aria } PNN'P' > \Delta S > \text{aria } PQQ'P'.$$

Intrucât : aria $PNN'P' = f_M(x)\ \Delta x$, aria $PQQ'P' = f_m(x)\ \Delta x$, $\Delta S = F(x + \Delta x) - F(x)$, dubla inegalitate de mai sus devine :

$$f_M(x) \cdot \Delta x > F(x + \Delta x) - F(x) > f_m(x) \cdot \Delta x.$$

Presupunând că Δx este pozitiv şi împărţind dubla inegalitate prin Δx *), obţinem :

$$f_M(x) > \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} > f_m(x).$$

Facem pe Δx să tindă către zero. La limită $f_m(x) = f_M(x) = f(x)$, iar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$.

Prin urmare

$$F'(x) = f(x),$$

de unde tragem concluzia că *aria S, considerată ca o funcţie de x, este funcţia primitivă a funcţiei* $f(x)$.

Dacă vom considera aria până la aceeaşi ordonată variabilă PM, însă dela altă ordonată constantă $P'_0 M'_0$ (fig. 112), atunci derivata

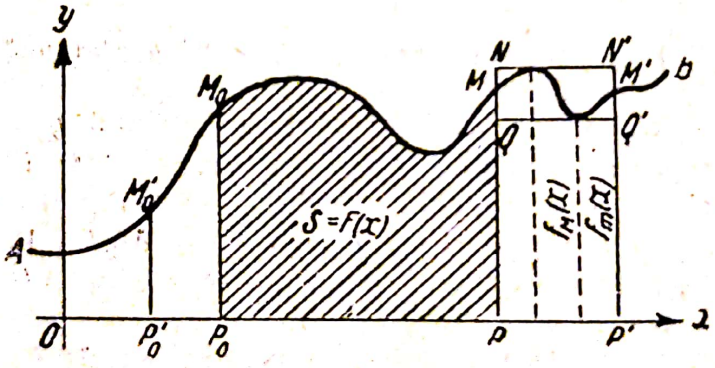

Fig. 112.

acestei arii noi, pe care o însemnăm cu $\varphi(x)$, va fi deasemenea egală cu $f(x)$, adică $\varphi'(x) = f(x)$. Diferenţa între această arie nouă şi cea anterioară este $P_0' M_0' M_0 P_0$, adică o mărime constantă C. Aceasta înseamnă că $\varphi(x)$ este o altă funcţie primitivă a lui $f(x)$.

*) Dacă $\Delta x < 0$, semnele inegalităţii s'ar schimba dacă împărţim prin Δx inegalitatea dublă însă mai departe raţionamentul ar rămâne acelaşi ca şi pentru $\Delta x > 0$. Deaceea rezultatul final al raţionamentului nostru rămâne valabil şi pentru $\Delta x < 0$.

Deci, ariile obţinute pentru poziţii diferite ale ordonatei iniţiale, considerate drept funcţii de x, reprezintă funcţii primitive ale funcţiei date $f(x)$.

De aici tragem concluzia că mulţimea infinită a ariilor, care se deosebesc între ele prin poziţia ordonatei iniţiale, reprezintă o mulţime *) infinită de funcţii, cuprinse în simbolul

$$\int f(x)\, dx$$

şi care se deosebesc între ele prin valorile unei constante arbitrare. În aceasta constă sensul geometric al integralei nedefinite.

§ 95. Integrala definită considerată ca arie

Să trecem acum la demonstrarea unei formule care să ne permită să calculăm mărimea ariei limitate de o linie curbă, care se exprimă prin ecuaţia $y = f(x)$, de două ordonate determinate $f(a)$ şi $f(b)$, corespunzătoare valorilor $x = a$ şi $x = b$ ale abscisei şi de axa absciselor.

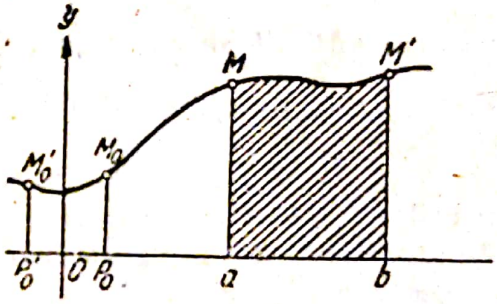

Fig. 113.

Pentru aceasta observăm că aria căutată poate fi exprimată ca diferenţa a două arii : aria $P_0M_0M'b$ (fig. 113) (adică aria limitată de o ordonată oarecare constantă P_0M_0, curba $y = f(x)$, ordonata $f(b)$ şi axa absciselor), şi aria P_0M_0Ma, [adică aria, limitată de aceeaşi ordonată constantă P_0M_0, curba $y = f(x)$, ordonata $f(a)$ şi axa absciselor]. Prima arie, $P_0M_0M'b$, reprezintă valoarea integralei nedefinite $\int f(x)\, dx$ pentru o poziţie stabilită a ordonatei iniţiale P_0M_0 şi pentru o poziţie fixă a ordonatei (fx), şi anume poziţia ordonatei pentru

---

*) Mai precis, *o parte* a mulţimii infinite de funcţii, cuprinse în simbolul $\int f(x)\, dx$. Explicaţia constă în aceea că fiecărei poziţii a ordonatei iniţiale îi corespunde o valoare determinată a constantei arbitrare, însă, în general, reciproca nu este adevărată : există valori ale constantei arbitrare cărora nu le poate corespunde nicio poziţie a coordonatei iniţiale. Fie, spre exemplu, $y = \sqrt{x}$. Atunci $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. Cum curba este situată în întregime la dreapta axei Oy, rezultă că, pentru orice ordonată iniţială, valoarea corespunzătoare a constantei C va fi negativă (sau egală cu zero, dacă se alege axa Oy drept ordonată iniţială). Prin urmare, unei valori pozitive a constatei arbitrare nu-i corespunde nici o ordonată iniţială.

$x = b$. In mod analog, mărimea ariei a doua reprezintă valoarea integralei nedefinite $\int f(x)\,dx$ pentru o ordonată inițială, P_0M_0, aleasă și pentru poziția pe care o ia ordonata variabilă $f(x)$, pentru valoarea $x = a$.

S'ar fi putut lua drept ordonată inițială orice altă ordonată de exemplu : $P_0'\ M_0'$; atunci aria căutată $aMM'b$ ar fi fost exprimată ca diferența ariilor :

$$\text{aria } P_0'M_0'M'b - \text{aria } P_0'M_0'Ma = \text{aria } aMM'b.$$

Aceasta înseamnă, că aria căutată poate fi exprimată ca diferența între două valori ale integralei nedefinite :

$$\int f(x)\,dx,$$

corespunzătoare valorilor $x = b$ și $x = a$, la o valoare arbitrară a constantei de integrare C. Dacă punem :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

atunci aria $aMM'b$ se exprimă prin diferența

$$[F(x) + C]_{x=b} - [F(x) + C]_{x=a} = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

[egalitățile $x = b$ și $x = a$, scrise cu caractere mici la baza parantezelor drepte, arată că integrala nedefinită $F(x) + C$ este luată pentru valorile $x = b$ și $x = a$].

Mai putem scrie :

$$\text{aria } aMM'b = [\int f(x)\,dx]_{x=b} - [\int f(x)\,dx]_{x=a}.$$

Această diferență se scrie sub formă prescurtată astfel :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

și se numește *integrală definită*. Valoarea $x = a$ se numește *limita inferioară a integralei*, iar valoarea $x = b$ *limita superioară* a integralei ; simbolul

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se citește astfel : *„integrala definită dela a la b a diferențialei* $f(x)\,dx$".

Am folosit notația :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

şi am aflat, că :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + C]_{x=b} - [F(x) + C]_{x=a} = F(b) - F(a),$$

C având o valoare arbitrară. Ţinând seama de faptul că, în rezultatul final dispare C, se scrie mai simplu astfel :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_{x=b} - [F(x)]_{x=a},$$

sau, încă mai simplu, în felul următor :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a),$$

unde, reamintim funcţia $F(x)$ are derivata $F'(x) = f(x)$.

Prin urmare, *aria aMM'b, limitată de curba* $y = f(x)$, *de ordonatele* $f(a)$ şi $f(b)$, *corespunzătoare absciselor* $x = a$ şi $x = b$, *şi de axa* Ox, *se exprimă prin integrala definită* :

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pentru a calcula integrala definită $\int_a^b f(x)\,dx$, trebue să aflăm integrala nedefinită a funcţiei $f(x)$, adică integrala :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

şi să scriem diferenţa între valorile funcţiei $F(x)$ pentru $x = b$ şi $x = a$, fără constanta arbitrară C :

$$F(b) - F(a) = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b.$$

Exemplul 1. Să se calculeze $\int_0^1 x^2\,dx$.

Rezolvare. Aflăm integrala nedefinită :

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Atunci

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

Rezolvare.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 3. Să se calculeze aria figurii mărginite de parabola $y = 4 - x^2$ și de axa Ox (fig. 114).

Rezolvare. Conform celor expuse mai sus, obținem :

$$A = \int_{-2}^{+2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{+2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}$$

unități pătrate.

Exemplul 4. Să se calculeze aria mărginită de sinusoida $y = \sin x$ și de axa Ox, între $x = 0$ și $x = 2\pi$ (fig. 115)

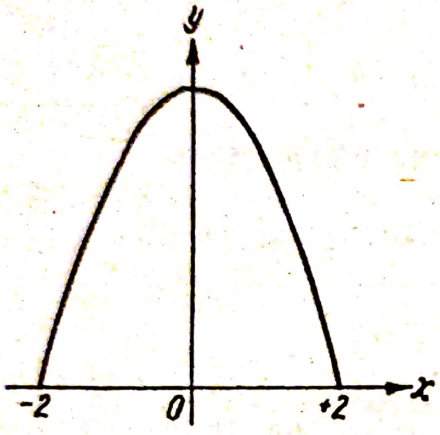

Fig. 114.

Rezolvare

$$A = \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$$

Din punct de vedere geometric rezultatul este un nonsens : aria este egală cu zero. Totuși acest rezultat se explică foarte ușor în mod natural : pentru calcularea ariilor mărginite de linii curbe, am emis o formulă analitică și, pentru a o putea folosi, trebue să atribuim acum ariilor, situate sub axa Ox, valori negative, la fel cum am introdus în geometria analitică segmente pozitive și negative.

In practică, este desigur important a cunoaște valoarea absolută a ariei Pentru exemplul dat trebue să calculăm în felul următor : calculăm porțiunea ariei situată deasupra axei Ox și apoi dublăm rezultatul obținut. Obținem astfel :

$$A = 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2\left[-\cos \pi - (-\cos 0) \right] = 2(+1+1) = 4$$

unități patrate.

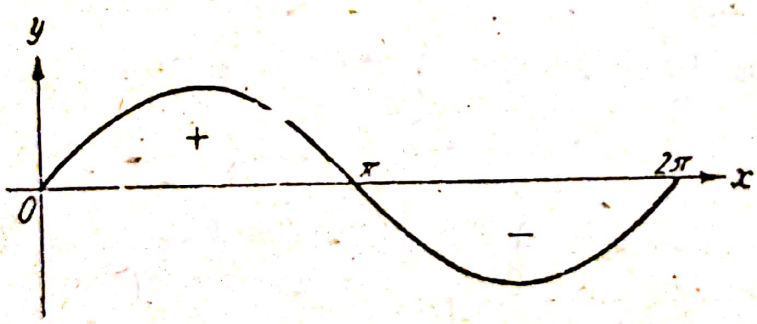

Fig. 115.

§ 96. Integrala definită ca limita unei sume

1. Putem ataca problema calculării ariei unei figuri curbilinii de tipul tratat în § 95, plecând și dela alte considerente, și anume în felul următor. Fie $y = f(x)$ o funcție continuă, pozitivă, crescătoare în intervalul $[a, b]$ (fig. 116).

Să considerăm aria $aMM'b$, mărginită de un arc al ariei $y = f(x)$, de ordonatele $f(a)$ şi $f(b)$ şi de axa Ox. Pentru calcularea acestei, arii împărţim segmentul (a, b) în n părţi, egale sau neegale, şi în punctele de diviziune ridicăm ordonate. Din extremităţile ordonatelor ridicate ducem drepte paralele cu axa absciselor, astfel, că toată figura va fi împărţită într'un şir de dreptunghiuri, deasupra cărora se află câte un triunghi curbiliniu (în figură aceste triunghiuri sunt haşurate). Suprafaţa fiecărui dreptunghi o putem calcula: dacă luăm unul din aceste dreptunghiuri şi însemnăm, ca deobicei, cu Δx baza lui, atunci aria lui va fi egală cu produsul $f(x)\,\Delta x$, unde $f(x)$ este înălţimea dreptunghiului, adică ordonata curbei $y = f(x)$, corespunzătoare valorii abscisei extremităţii din stânga a micului segment Δx.

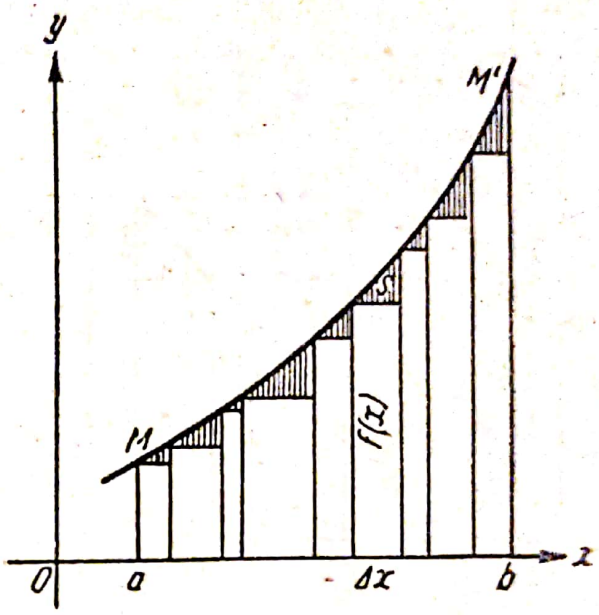

Fig. 116.

Nu ştim încă cum se calculează aria unui triunghi curbiliniu. Dacă însemnăm s aria unuia din aceste triunghiuri, atunci aria S a întregii figuri poate fi prezentată sub forma a două sume:

suma $$\sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

a ariilor dreptunghiurilor şi suma $\sum_a^b s$ a ariilor triunghiurilor curbilinii, adică putem scrie:

$$S = \sum_a^b f(x)\,\Delta x + \sum_a^b s.$$

Litera Σ este o notaţie prescurtată pentru o sumă. După această literă se află o expresie, care ne arată ce fel de termeni adunăm. Literele a şi b, situate dedesubtul şi deasupra literei Σ, arată că sumarea se face dela valoarea $x = a$ până la valoarea $x = b$.

Dacă vom face acum ca toate segmentele mici Δx să se apropie simultan de zero, atunci numărul n al segmentelor va creşte nelimitat, iar, la limită, suma a doua $\sum_a^b s$ se va anula. Acest lucru îl vom demonstra

mai jos. In acest caz ea este o cătime infinit mică. Aria căutată S este o mărime constantă. Suma $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$ este o mărime variabilă. In baza celor de mai sus şi conform definiţiei limitei, obţinem:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

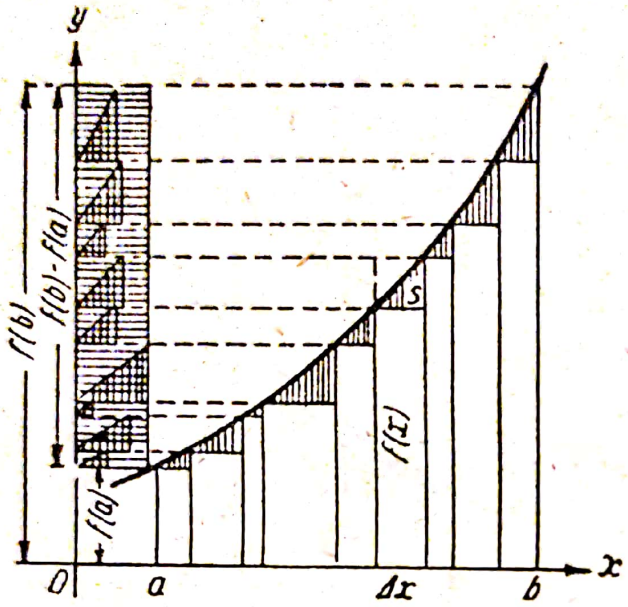

Fig. 117.

2. Să demonstrăm acum, că $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b s = 0$, adică limita sumei suprafeţelor haşurate ale triunghiurilor curbilinii este egală cu zero, când lungimile tuturor segmentelor parţiale Δx tind simultan către zero.

Să deplasăm fiecare triunghi paralel cu axa astfel, ca extremităţile lor din stânga să ajungă pe axa Oy (fig. 117). Figura arată că suma ariilor tuturor triunghiurilor este mai mică decât aria dreptunghiului haşurat orizontal. Baza acestui dreptunghi este cel mai mare segment parţial Δx, iar înălţimea este segmentul, a cărui lungime este egală cu diferenţa $f(b) - f(a)$, adică cu diferenţa ordonatelor corespunzătoare extremităţilor b şi a ale segmentului (a, b).

Prin urmare,

$$0 < \sum_a^b s < [(f(b) - f(a)]\,\Delta x, \qquad (1)$$

unde cu Δx s'a notat lungimea celui mai mare dintre elementele parţiale, în care este împărţit întregul segment (a, b).

Intrucât considerăm cazul când lungimile tuturor segmentelor parţiale tind către zero, rezultă că şi cel mai mare dintre aceste segmente tinde către zero. Diferenţa $f(b) - f(a)$ este o mărime constantă.

Deaceea:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(b) - f(a)]\,\Delta x = 0.$$

Atunci avem, în virtutea inegalității (1),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} s = 0.$$

Deci, *aria S a figurei noastre este egală cu limita sumei ariilor dreptunghiurilor* $f(x)\,\Delta x$, adică :

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x.$$

3. Fie acum $y = f(x)$ o funcție, pozitivă și descrescătoare în intervalul $[a, b]$ (fig. 118). Atunci aria S a figurii $aMM'b$ se exprimă prin diferența sumelor

$$S = \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x - \sum_{a}^{b} s,$$

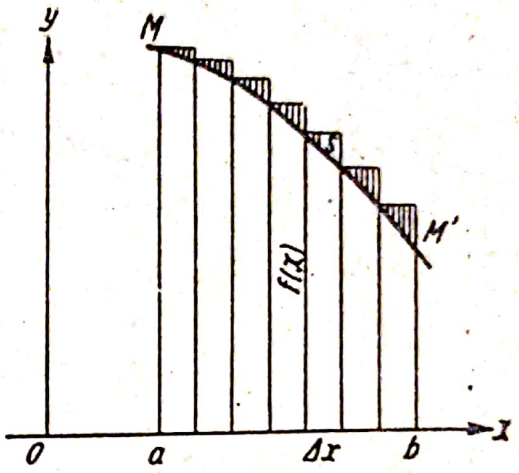

Fig. 118.

s fiind aria unui triunghi curbiliniu.

Raționând la fel ca în cazul precedent, obținem din nou rezultatul :

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x.$$

4. Să presupunem, însfârșit, că funcția $y = f(x)$ uneori crește și alteori descrește rămânând pozitivă în intervalul $[a, b]$. Admitem, că segmentul $[a, b]$ poate să fie împărțit în părți, în care funcția să fie sau numai crescătoare, sau numai descrescătoare. Astfel, în fig. 119 este reprezentată o funcție $y = f(x)$, care crește când abscisa variază dela $x = a$ la $x = c$, descrește dela $x = c$ la $x = d$, apoi crește din nou în intervalul dela $x = d$ la $x = e$, iar în ultima parte a segmentului [a,b]. adică dela $x = e$ la $x = b$, descrește din nou. Pe baza celor spuse putem scrie :

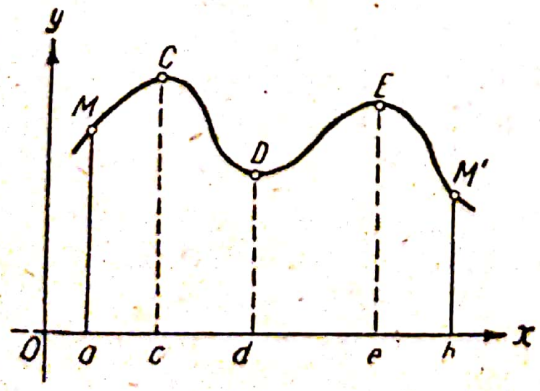

Fig.119.

$$\text{aria } aMCc = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{c} f(x)\,\Delta x,$$

$$\text{aria } cCDd = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{c}^{d} f(x)\,\Delta x,$$

$$\text{aria } dDEe = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{d}^{e} f(x)\,\Delta x,$$

$$\text{aria } eEM'b = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{e}^{b} f(x)\,\Delta x.$$

Evident, aria $aMM'b$ = aria $aMCc$ + aria $cCDd$ + aria $dDEe$ + + aria $eEM'b$, adică

$$\text{aria } aMM'b = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{c} f(x)\ \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{c}^{d} f(x)\ \Delta x +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{d}^{e} f(x)\ \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{e}^{b} f(x)\ \Delta x,$$

sau, în baza teoremei despre limita unei sume, aria $aMM'b = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \sum_{a}^{c} f(x)\ \Delta x + \sum_{c}^{d} f(x)\ \Delta x + \sum_{a}^{e} f(x)\ \Delta x + \sum_{e}^{b} f(x)\ \Delta x \right\}$.

Insă, expresia cuprinsă între acolade poate fi înlocuită prin suma $\sum_{a}^{b} f(x)\ \Delta x$. Astfel obţinem însfârşit :

$$\text{aria } aMM'b = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\ \Delta x.$$

Acest rezultat arată că metoda folosită pentru calcularea unei arii curbilinii este aplicabilă şi în cazul când funcţia $y = f(x)$ este când crescătoare, când descrescătoare în diferite părţi ale intervalului considerat.

5. Dacă curba se află sub axa Ox (fig. 120), atunci ordonatele $y = f(x)$ sunt negative şi produsul $f(x)\ \Delta x$ va fi deasemenea negativ. Prin urmare, suma

$$\sum_{a}^{b} f(x)\ \Delta x$$

este negativă şi deaceea limita sumei va avea semnul minus. Astfel ajungem la necesitatea de a atribui ariilor semnul plus sau minus.

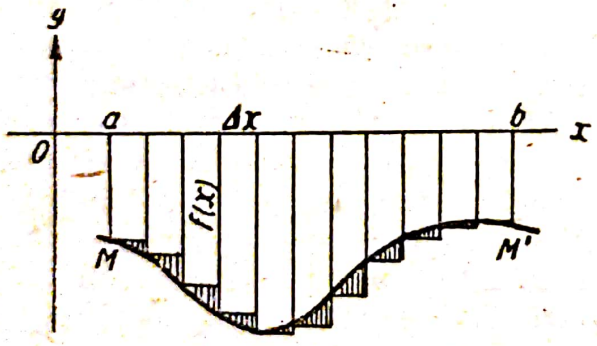

Fig. 120.

6. In § 96 am văzut că mărimile ariilor unor figuri, asemenea celor tratate în acest paragraf, au fost exprimate prin integrala definită.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Deaceea, putem scrie :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\ \Delta x. \qquad (2)$$

Această formulă arată că : *Integrala definită poate fi considerată ca limita unei sume de termeni foarte mici în număr foarte mare. Când numărul termenilor crește nelimitat, fiecare termen tinde către zero, adică este un infinit mic. Termenii reprezintă valorile sucesive ale expresiei* $f(x)dx$, *de sub semnul integrală.*

Această prezentare nouă a integralei definite are o importanță deosebit de mare în aplicațiile pe care le vom trata în paragrafele următoare.

§ 97. Proprietățile cele mai elementare ale integralei definite

Folosind definiția integralei definite ca limita unei sume, să analizăm trei proprietăți elementare ale ei.

1. *Dacă schimbăm între ele limitele de integrare, semnul integralei se schimbă.*

Această proprietate poate fi scrisă prin formula :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Demonstrație. Dacă $a > b$, obținem, prin divizarea segmentului de integrare în părți Δx, începând din extremitatea a, valori negative pentru mărimile Δx, și termenii $f(x)\,\Delta x$ ai sumei :

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

se vor deosebi de termenii corespunzători ai sumei :

$$\sum_b^a f(x)\,\Delta x$$

numai prin semn.

Deaceea și limitele acestor sume, adică :

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ și } \int_b^a f(x)\,dx,$$

se vor deosebi deasemenea numai prin semnul lor.

2. *Un factor constant al funcției de sub semnul integrală poate fi scos înafara integralei definite.*

Această proprietate poate fi exprimată prin formula :

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstrație. In virtutea formulei (2) § 96 avem:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b cf(x)\,\Delta x.$$

Intrucât c este factor comun în toți termenii sumei, putem scrie:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b cf(x)\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} c \sum_a^b f(x)\,\Delta x =$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x = c \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Integrala definită a unei sume algebrice de funcții este egală cu suma algebrică a integralelor definite ale fiecărei funcții în parte.*

Limitându-ne la o sumă de trei termeni, putem exprima această proprietate prin formula:

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Demonstrație. In baza formulei (2) § 96 avem:

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\right] dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\right] \Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \varphi(x)\,\Delta x - \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \psi(x)\,\Delta x =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

§ 98. Principiile aplicării calculului integral

Multe probleme cu caracter aplicativ se rezolvă printr'o metodă analoagă cu cea analizată în § 96.

Astfel, calcularea unei mărimi oarecare S se reduce la calcularea sumei unor termeni de tipul $f(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, unde mărimea α este necunoscută, însă se știe că cea mai mare valoare a lui α tinde către 0, când $\Delta x \to 0$. In acest caz, considerăm mărimea căutată ca limita sumei $\Sigma\,[f(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x]$ pentru $\Delta x \to 0$. Impărțind această sumă în două părți, obținem:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum [f(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\,\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum \alpha \cdot \Delta x,$$

și toată problema se reduce la a demonstra că $\lim_{\Delta x \to 0} \sum \alpha \cdot \Delta x = 0$.

Conform unei proprietăți a valorii absolute a unei sume algebrice, avem :

$$\left|\sum \alpha \cdot \Delta x\right| \leqslant \sum \left|\alpha \cdot \Delta x\right| = \sum \left|\alpha\right| \cdot \left|\Delta x\right| .$$

Să însemnăm cu α' cea mai mare dintre valorile absolute α. Atunci :

$$\sum \left|\alpha \cdot \left|\Delta x\right| < \sum \alpha' \left|\Delta x\right| = \alpha' \sum \left|\Delta x\right| = \alpha' \left|b - a\right| ,$$

și deci, cu atât mai mult

$$\left|\sum \alpha \, \Delta x\right| < \alpha' \left|b - a\right| .$$

Când $\Delta x \to 0$, atunci, conform premisei, $\alpha' \to 0$. Prin urmare,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha' \left|b - a\right| = 0.$$

De aici tragem concluzia, că

$$\sum \alpha \, \Delta x$$

este o mărime infinit mică, și deaceea

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum \alpha \, \Delta x = 0.$$

Produsul de forma $\alpha \cdot \Delta x$ este un infinit mic de ordin superior lui Δx, fiindcă

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0,$$

întrucât $\alpha \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$. Deaceea principiul folosit în aplicații poate să fie formulat în felul următor :

La calcularea limitei unei sume de termeni de forma $f(x) \, \Delta x + \alpha \Delta x$, *pentru* $\Delta x \to 0$, *mărimile* $\alpha \, \Delta x$ ($\alpha \to 0$, *când* $\Delta x \to 0$), *fiind infiniți mici de ordin superior în comparație cu* Δx, *pot fi neglijate. Atunci mărimea căutată* S *se definește ca* $\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x) \, \Delta x$:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x) \, \Delta x.$$

In aplicațiile calculului integral, se atribue totdeauna un conținut concret variabilei independente și funcției $y = f(x)$. Astfel, studiind mișcarea unui corp, se poate înțelege prin x timpul, iar prin y viteza ; la calcularea presiunii, vom vedea mai jos, se înțelege prin x

adâncimea, la care este scufundată o placă în lichid, iar prin y presiunea corespunzătoare adâncimii x, etc. Indiferent de sensul concret al funcţiei $f(x)$, o putem reprezenta totdeauna sub forma ordonatei curbei $y = f(x)$. In cazul acesta

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\ \Delta x$$

exprimă mărimea unei suprafeţe curbilinii; şi întrucât mărimea unei suprafeţe este definită prin integrala

$$\int_a^b f(x)\ dx,$$

problema aflării mărimii S se reduce la calcularea integralei definite:

$$S = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Această metodă am cercetat-o amănunţit în § 96, unde mărimea unei suprafeţe curbilinii a fost calculată tocmai printr'o astfel de trecere la limită.

§ 99. Volumul piramidei

1. Să tratăm ca un exemplu de aplicare a integralei definite demonstrarea formulei pentru volumul piramidei. Să determinăm mai întâi volumul unei piramide triunghiulare, date fiind aria bazei şi înălţimea.

Să dă piramida $COAB$ (fig. 121). Să notăm aria bazei cu S, iar înălţimea cu H. Impărţim înălţimea în n părţi (egale sau neegale) şi prin punctele de diviziune ducem plane paralele cu planul bazei piramidei. Prin aceste plane piramida se împarte în n părţi. Să însemnăm cu v volumul uneia din cele n părţi ale piramidei. Construim apoi peste triunghiurile formate în diferite secţiuni, prisme cu muchiile paralele cu una din muchiile piramidei, de exemplu, cu OC. Există două grupe de astfel de prisme: una din ele constă din prisme cuprinse în întregime în interiorul piramidei, iar cealaltă, din prisme care ies din piramidă. Să arătăm că diferenţa dintre volumele a două piramide din aceste grupe, corespunzătoare unui acelaşi volum parţial v al piramidei, este un infinit mic de ordin superior în comparaţie cu înălţimea comună Δx a prismelor respective (v. fig. 121). Fie triunghiul abc baza prismei care iese din piramidă şi triunghiul $a'b'c'$ baza prismei cuprinse

în interiorul piramidei. Să însemnăm cu p aria triunghiului abc, și cu p' aria triunghiului $a'b'c'$. Volumul prismei care iese din piramidă este egal cu $p \cdot \Delta x$, iar cel al prismei cuprinse în interiorul piramidei $p' \cdot \Delta x$.

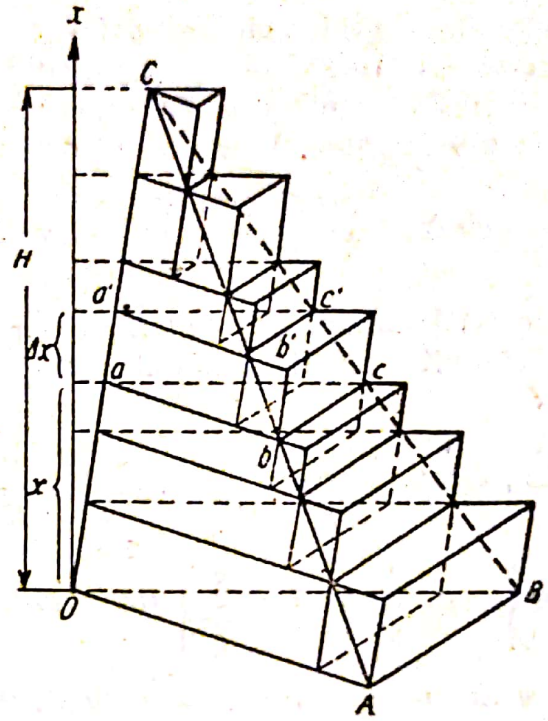

Fig. 121.

Conform unei teoreme cunoscute din geometrie, avem :

$$\frac{p}{S} = \frac{(H-x)^2}{H^2}, \quad \frac{p'}{S} = \frac{[H-(x+\Delta x)]^2}{H^2},$$

de unde :

$$p = \frac{(H-x)^2}{H^2} \cdot S, \; p' = \frac{[H-(x+\Delta x)]^2}{H^2} S.$$

Notând cu q volumul prismei mai mari, iar cu q' volumul celei mai mici, obținem :

$$q - q' = \frac{(H-x)^2}{H^2} \cdot S \cdot \Delta x - \frac{[H-(x+\Delta x)]^2}{H^2} \cdot S \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{S}{H^2}\left\{(H-x)^2 - \left[(H-x) - \Delta x\right]^2\right\}\Delta x =$$

$$= \frac{S}{H^2}\left\{(H-x)^2 - (H-x)^2 + 2(H-x)\,\Delta x - (\Delta x)^2\right\}\Delta x =$$

$$= \frac{S}{H^2}\left[2(H-x) - \Delta x\right](\Delta x)^2 = K \cdot (\Delta x)^2.$$

In consecinţă,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q - q'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (K \cdot \Delta x) = 0.$$

Astfel, diferenţa dintre volumele prismelor este un infinit mic de ordin superior lui Δx. Şi, întrucât $q' < v < q$, diferenţa $q - v$ este cu atât mai mult un infinit mic de ordin superior lui Δx. Punând $q - v = \alpha \cdot \Delta x$ (unde $\alpha \to 0$, când $\Delta x \to 0$), obţinem:

$$v = q - \alpha \cdot \Delta x = \frac{(H - x)^2}{H^2} \cdot S \cdot \Delta x - \alpha \cdot \Delta x.$$

Să însemnăm cu V volumul piramidei. Conform principiului de aplicare a integralei definite, neglijăm infinitul mic de ordin superior lui Δx şi obţinem:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \frac{(H - x)^2}{H^2} \cdot S \cdot \Delta x = \int_0^H \frac{(H - x)^2}{H^2} \cdot S \cdot dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H (H - x)^2 \, dx =$$

$$= \frac{S}{H^2} \left\{ H^2 \int_0^H dx - 2H \int_0^H x \, dx + \int_0^H x^2 \, dx \right\} = \frac{S}{H^2} \left\{ H^3 - H^3 + \frac{H^3}{3} \right\} = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Prin urmare, *volumul unei piramide triunghiulare este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei piramidei şi înălţimea ei.*

2. Pentru a calcula volumul V al unei piramide poligonale cu n laturi, o vom împărţi în n piramide triunghiulare, ducând plane diagonale prin una din muchii. Evident, înălţimile acestor piramide vor fi aceleaşi şi egale cu H, înălţimea piramidei poligonale. Vom nota cu s_1, s_2,..., s_n ariile bazelor piramidelor triunghiulare şi cu S aria bazei piramidei poligonale. Cum $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = S$, vom obţine:

$$V = \frac{1}{3} s_1 \cdot H + \frac{1}{3} s_2 \cdot H + \ldots + \frac{1}{3} s_n \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3} H (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = \frac{1}{3} H \cdot S.$$

§ 100. Exemple de calculare a ariilor

Dacă $y = f(x)$ este ecuaţia unei linii, atunci mărimea ariei S, mărginită de această linie, de ordonate a două puncte ale ei, de abscise a şi b, şi de axa absciselor, este definită prin formula:

$$S = \int_a^b f(x) \, dx,$$

cum am arătat în § 95.

Aplicând această formulă, să cercetăm două exemple mai complicate de calculare a ariilor (două exemple au fost cercetate la sfârșitul § 95).

Exemplul 1. Să se calculeze aria cuprinsă între parabolele $y^2 = 2px$ și $x^2 = 2py$.

Rezolvare. Pentru a afla aria căutată, vom scade aria, mărginită de parabola $x^2 = 2py$, axa Ox și ordonata punctului de intersecție al parabolelor, din aria mărginită de parabola $y^2 = 2px$, axa Ox și aceeași ordonată (fig. 122).

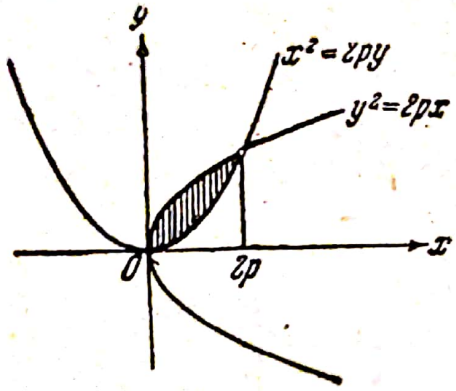

Fig. 122.

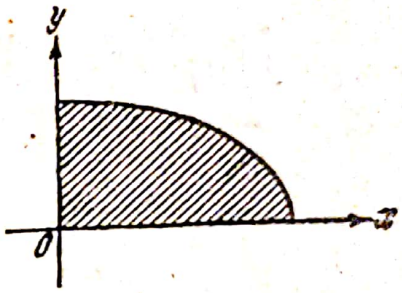

Fig. 123.

Pentru a fixa limitele integralelor care exprimă aceste arii, trebue să aflăm abscisele punctelor de intersecție ale curbelor date. Rezolvând simultan ecuațiile $y^2 = 2px$ și $x^2 = 2py$, aflăm $x = 0$ și $x = 2p$. Obținem prin urmare :

$$S = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{2p}\int_0^{2p} x^2\,dx =$$

$$= \sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2p} - \frac{1}{2p}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2p} = \sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2p)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2p}\cdot\frac{8p^3}{3} = \frac{4}{3}p^2.$$

Exemplul 2. Să se afle aria mărginită de elipsa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rezolvare. Pentru a determina integrala ariei căutate, vom afla un sfert din arie și vom înmulți rezultatul cu 4. Din ecuația elipsei obținem :

$$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

în fața radicalului luăm semnul +, fiindcă considerăm arcul de elipsă situat în primul cadran (fig. 123)].

Insemnând cu S aria căutată avem :

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Integrala nedefinită

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

am calculat-o într'un exercițiu dela § 92.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Prin urmare,

$$S = 4\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a =$$

$$= 4\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin 1 + 0 - \frac{a^2}{2}\arcsin 0 - 0\right) = 4\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Să calculăm și altfel integrala considerată, fără a recurge la aflarea prealabilă a integralei nedefinite, ci făcând o schimbare de variabilă sub semnul integralei definite.

Să punem $x = a\sin\varphi$. Atunci $dx = a\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2\varphi)} = a\cos\varphi.$$

Limitele de integrare 0 și a se referă la variabila x. Când am introdus însă noua variabilă φ, cu ajutorul relației $x = a\sin\varphi$. atunci, evident, limitele de integrare pentru această variabilă nouă vor fi altele. Aflăm limitele de integrare pentru variabila nouă din aceeași relație $x = a\sin\varphi$, înlocuind succesiv pe x prin limita inferioară și prin cea superioară, și calculând valorile corespunzătoare pentru φ.

Astfel obținem :

$$0 = a\sin\varphi,$$

de unde

$$\varphi = 0;$$

apoi,

$$a = a\sin\varphi,$$

de unde

$$\sin\varphi = 1 \text{ și } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Vom avea prin urmare:

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi \cdot a\cos\varphi \cdot d\varphi = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4ab\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right\} = 4ab\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi\right\}.$$

Prima integrală din paranteze se calculează direct. Pentru rezolvarea integralei a doua se pune $2\varphi = \psi$. Atunci $d\varphi = \frac{d\psi}{2}$, și limitele de integrare pentru variabila ψ vor fi 0 și π (limitele le aflăm din relația $2\varphi = \psi$, înlocuind mai întâi $\varphi = 0$ și apoi $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Astfel obținem:

$$S = 4ab\left\{\frac{1}{2}\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos\psi\, d\psi\right\} =$$

$$= 4ab\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0)\right\} = \pi ab.$$

Rezultatul acestui exemplu arată că la schimbarea de variabilă sub semnul unei integrale definite, putem să nu exprimăm rezultatul integrării prin variabila veche, dacă aflăm limitele de integrare pentru variabila nouă.

Justificarea precisă a regulei de schimbare de variabilă sub semnul integralei definite poate fi găsită într'un curs amănunțit de analiză matematică.

§ 101. Volumul unui corp de rotație

2. *Se numește corp de rotație un corp format prin rotația unui arc AB al unei linii oarecare (arcul AB se numește generatoare) în jurul unei drepte fixe MN numită axă de rotație* (fig. 124).

Să luăm pe generatoare un punct oarecare P și să coborîm din acest punct perpendiculara PC pe axa de rotație. Evident, prin rotație nu se modifică nici lungimea acestei perpendiculare, nici mărimea

unghiului MCP, nici poziţia punctului C. Deaceea fiecare punct al generatoarei descrie în mişcarea de rotaţie o circumferinţă, iar planul, perpendicular pe axa de rotaţie intersectează corpul de rotaţie după un cerc.

2. Cel mai simplu corp de rotaţie este cilindrul circular drept. Să deducem formula, care dă volumul cilindrului V exprimat în funcţie de raza r şi de înălţimea H.

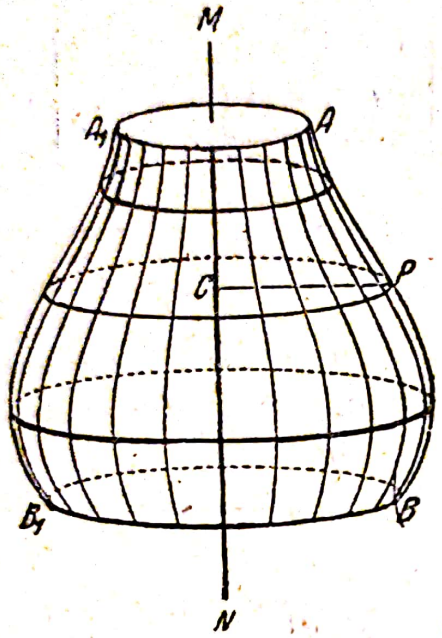

Fig 124.

Să înscriem în cilindru o prismă dreaptă cu baza un poligon regulat cu n laturi şi să circumscriem deasemenea, în jurul cilindrului, o prismă dreaptă cu baza tot un poligon regulat, cu acelaşi număr de laturi ca şi cea înscrisă. Să însemnăm cu s aria bazei prismei înscrise şi cu S aria bazei prismei circumscrise. Desigur, înălţimile prismelor vor fi egale între ele şi egale cu înălţimea H a cilindrului. Cum ştim din cursul de geometrie, volumele prismelor înscrisă şi circumscrisă vor fi respectiv egale cu sH şi SH. Să scriem diferenţa :

$$SH - sH = (S - s)H.$$

Deasemenea, este cunoscut din cursul de geometrie, că, mărind nelimitat numărul laturilor poligoanelor (bazele prismelor) cu condiţia ca lungimea fiecărei laturi să tindă către zero, diferenţa $S - s \to 0$.

Să însemnăm cu V volumul cilindrului. Evident,

$$0 < V - sH < SH - sH = (S - s)\,H.$$

De aici urmează că, atunci când $S - s \to 0$, cu atât mai mult $V - sH \to 0$. Deoarece V este o mărime constantă, iar diferenţa $V - sH$ este infinit de mică, avem :

$$V = \lim sH = H \cdot \lim s.$$

Cum $\lim s = \pi r^2$ (considerăm aceasta cunoscut din geometrie), obţinem însfârşit :

$$V = \pi r^2 H.$$

3. Să deducem acum formula pentru determinarea volumului unui corp de rotaţie, fiind dată ecuaţia generatoarei.

Fie $y = f(x)$ ecuaţia unei curbe. Se cere să se afle volumul corpului format prin rotaţia în jurul axei Ox a unui arc al curbei, cuprins între ordonatele $f(a)$ şi $f(b)$.

Tot astfel cum am procedat la aflarea ariei unei figuri plane, să ne închipuim întreg corpul împărţit într'un număr mare de părţi prin plane, perpendiculare pe axa absciselor. Să ne închipuim că volumul fiecărei părţi constă din volumul cilindrului, format prin rotaţia unui dreptunghi cu baza Δx şi înălţimea y, şi din volumul corpului format prin rotaţia unui triunghi curbiliniu, aşezat deasupra dreptunghiului (în fig. 125 acest triunghi curbiliniu este haşurat).

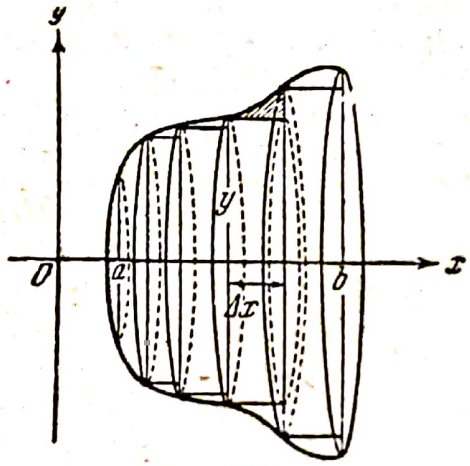

Fig. 125.

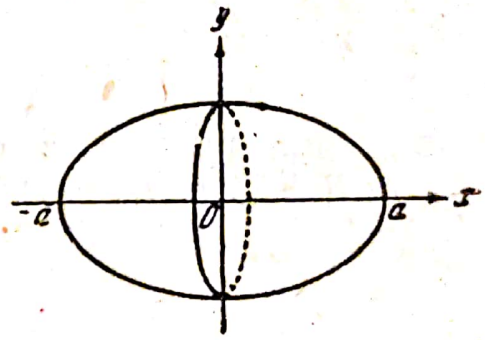

Fig. 126.

Se poate arăta uşor că volumul corpului, format prin rotaţia triunghiului curbiliniu, este un infinit mic de ordin superior lui Δx. Neglijând aceste volume conform principiului formulat în § 98, vom exprima volumul unui corp de rotaţie sub forma unei limite a sumei volumelor. Volumul unui cilindru, având raza bazei y şi înălţimea Δx, este egal cu $\pi y^2 \Delta x$; prin urmare,

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} \pi y^2 \Delta x = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \qquad (3)$$

Exemplu. Să se afle volumul corpului format prin rotaţia elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ în jurul axei Ox (fig. 126).

Rezolvare: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, obţinem conform formulei (3):

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \, dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 102. Volumul conului, al trunchiului de con și al segmentului de sferă

1. *Volumul conului circular drept. Conul circular drept poate fi considerat ca un corp format prin rotația unei segment de dreaptă, OA, în jurul axei în așa fel, încât extremitatea O a segmentului rămâne fixă, iar extremitatea A descrie o circumferință.*

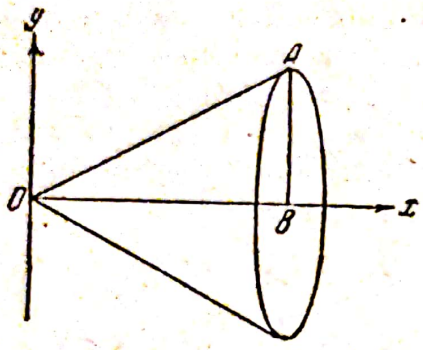

Fig. 127.

Se consideră un con. Să deducem formula care definește volumul conului în funcție de raza r a bazei și de înălțimea conului, H.

Să așezăm origina în vârful O al conului, iar axa Ox pe axa conului (fig. 127). Generatoarea OA a conului este un segment al dreptei cu coeficientul unghiular egal cu raportul $\frac{AB}{OB}$.

Segmentul AB este raza r a cercului de bază a conului iar segmentului OB, înălțime H a conului. Deaceea ecuația generatoarei AO are forma :

$$y = \frac{r}{H} x.$$

Dacă însemnăm cu V volumul conului, obținem, conform formulei (3) § 101 :

$$V = \pi \int_0^H y^2 \, dx = \pi \int_0^H \frac{r^2}{H^2} x^2 \, dx = \frac{\pi r^2}{H^2} \int_0^H x^2 \, dx = \frac{\pi r^2}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

2. *Volumul trunchiului de con.* Se consideră trunchiul de con ca un corp format prin rotația laturii AB a trapezului dreptunghi $OABB_1$ în jurul laturii OB_1 (perpendiculară pe bazele OA și BB_1 ale trapezului, fig. 128).

Să deducem o formulă care să exprime volumul trunchiului de con în funcție de razele $OA = r_1$: $B_1B = r_2$ ale bazelor și de înălțimea $OB_1 = H$.

Se vede ușor că coeficientul unghiular al generatoarei AB este egal cu $\frac{r_2 - r_1}{H}$. Deaceea ecuația generatoarei este :

$$y = \frac{r_2 - r_1}{H} x + r_1.$$

Notând volumul trunchiului de con cu V, obținem conform formulei (3) § 101 :

$$V = \pi\int_0^H \left(\frac{r_2 - r_1}{H}\,x + r_1\right)^2 dx = \pi\left\{\frac{(r_2-r_1)^2}{H^2}\int_0^H x^2\,dx + \right.$$

$$\left. + 2r_1\cdot\frac{r_2 - r_1}{H}\int_0^H x\,dx + r_1^2\int_0^H dx\right\} = \pi\left\{\frac{(r_2-r_1)^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} + 2r_1\,\frac{r_2-r_1}{H}\cdot\frac{H^2}{2} + \right.$$

$$\left. + r_1^2 H\right\} = \frac{1}{3}\,\pi r_2^2 H + \frac{1}{3}\,\pi r_1^2 H + \frac{1}{3}\pi r_1 r_2 H.$$

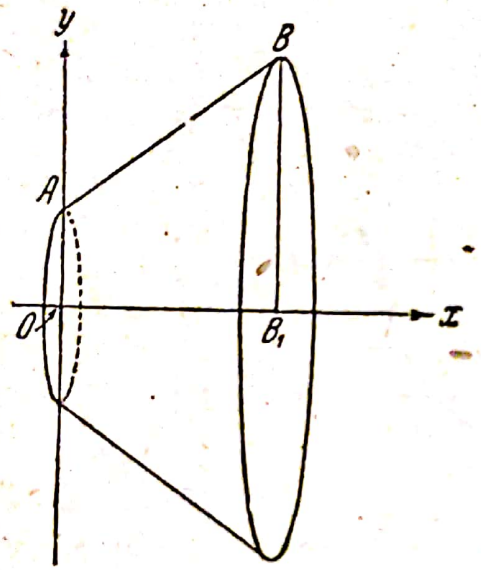

Fig. 128.

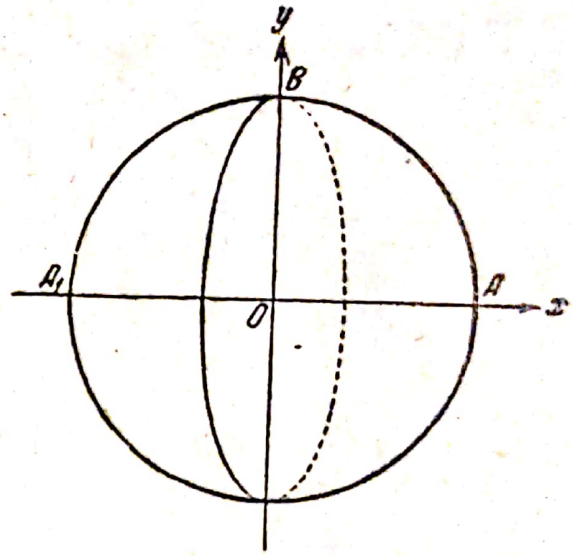

Fig. 129.

Prin urmare, *volumul unui trunchi de con este egal cu suma volumelor a trei conuri de aceeași înălțime cu trunchiul de con și având următoarele baze : primul, baza mare a trunchiului de con ; al doilea baza mică și al treilea un cerc, având ca arie media geometrică între ariile bazelor trunchiului de con.*

3. *Volumul sferei.* Se consideră sfera ca un corp format prin rotația unui semicerc în jurul unui diametru, adică prin rotația arcului ABA_1 al circumferinței :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

în jurul axei Ox (fig. 129). Din ecuația precedentă avem : $y^2 = r^2 - x^2$. Insemnând cu V volumul sferei, obținem după formula (3) § 101 :

$$V = \pi\int_{-r}^{+r}(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left\{r^2\int_{-r}^{+r} dx - \int_{-r}^{+r} x^2\,dx\right\} =$$

$$= \pi\left\{r^2\left[x\right]_{-r}^{+r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{+r}\right\} = \pi\left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4. *Volumul unui segment de sferă.* Un segment de sferă poate fi considerat ca un corp format prin rotaţia unui arc de cerc AB în jurul diametrului A_1A (fig. 130). Segmentul CA al diametrului sferei se numeşte *înălţimea segmentului* de sferă. Suprafaţa cercului, obţinut prin intersecţia sferei cu planul, care desparte segmentul de sferă, se numeşte *baza* segmentului.

Să deducem formula care exprimă volumul segmentului de sferă în funcţie de raza sferei, r şi de înălţimea segmentului, $CA = H$.

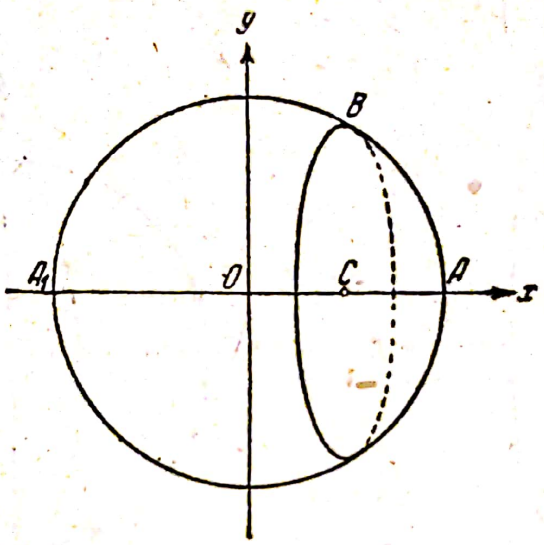

Fig. 130.

Vom considera segmentul ca un corp format prin rotaţia, în jurul axei Ox, a arcului AB din cercul

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Insemnând cu V volumul segmentului, obţinem :

$$V = \pi \int_{r-H}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left\{ r^2 [x]_{r-H}^{r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{r-H}^{r} \right\} =$$

$$= \pi \left\{ r^2 [r - (r - H)] - \frac{1}{3} [r^3 - (r - H)^3] \right\} =$$

$$= \pi \left\{ r^2 H - \frac{1}{3} (r^3 - r^3 + 3r^2 H - 3rH^2 + H^3) \right\} =$$

$$= \pi \left(r^2 H - r^2 H + rH^2 - \frac{1}{3} H^3 \right) = \pi H^2 \left(r - \frac{1}{3} H \right).$$

Astfel, *volumul segmentului de sferă este egal cu volumul unui cilindru, care are drept rază a bazei înălțimea segmentului, iar înălțimea egală cu raza sferei, micșorată cu o treime din înălțimea segmentului.*

§ 103. Lucrul mecanic al unei forțe

Dacă un corp se deplasează în linie dreaptă cu un segment de lungime x, sub acțiunea unei forțe constante F, îndreptată în direcția mișcării corpului, atunci produsul $F \cdot x$ se numește lucrul mecanic al forței.

Noțiunea lucrului mecanic al unei forțe constante poate fi extinsă în felul următor și la cazul unei forțe variabile.

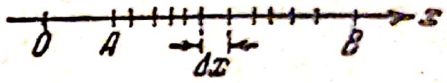

Fig. 131.

Să admitem că corpul se deplasează în lungul axei Ox, din punctul $A(x = a)$ în punctul $B(x=b)$ (fig. 131) sub influența forței F, care este o funcție de x, $F = f(x)$ și îndreptată în direcția axei Ox.

Dacă forța este variabilă, atunci lucrul mecanic poate fi determinat numai prin trecere la limită.

Pentru a calcula lucrul mecanic efectuat de forță prin deplasarea corpului dealungul segmentului AB, vom proceda în mod analog ca la aplicațiile geometrice ale integralei.

Vom socoti cu aproximație că corpul se deplasează pentru fiecare segment Δx sub acțiunea unei forțe constante, egale, de exemplu, cu valoarea ei, corespunzătoare extremității din stânga a intervalului Δx. Atunci lucrul mecanic efectuat de forță pe fiecare segment Δx, se exprimă prin produsul $f(x)\,\Delta x$ (*lucru mecanic elementar*). Această valoare aproximativă a lucrului mecanic se deosebește de cea exactă printr'o mărime infinit mică de ordin superior în comparație cu Δx. Conform principiului general expus la § 98, această eroare poate fi neglijată; atunci lucrul P, efectuat de forță prin deplasarea corpului pe întreg segmentul AB, se definește ca limita sumei lucrurilor mecanice elementare, când n, numărul intervalelor Δx, crește nemărginit (cu condiția ca toate lungimile Δx să tindă către zero). Prin urmare obținem:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Exemplu. Comprimarea unui arc spiral este proporțională cu forța aplicată. Să se afle lucrul mecanic efectuat prin comprimarea unui arc cu 3 cm, dacă știm că pentru a-l comprima cu 0,5 cm, trebue aplicată o forță de 1 kg.

Rezolvare. Fie x comprimarea arcului, exprimată în metri; atunci forța $f(x)$, necesară pentru a comprima arcul cu x m, va fi egală cu kx, unde k este un coeficient de proporționalitate. Pentru $x=0{,}005$ m, forța $f(0{,}005) = k \cdot 0{,}005 = 1$; prin urmare, $k = \dfrac{1}{0{,}005} = 200$ și $f(x) = 200\,x$.

Conform formulei deduse, lucrul mecanic efectuat de forță la comprimarea arcului cu 3 cm = 0,03 m, este egal cu :

$$\int_0^{0,03} f(x)\,dx = \int_0^{0,03} 200\,x\,dx = 100\,[x^2]_0^{0,03} = 0,09 \text{ kgm}.$$

§ 104. Presiunea unui lichid

Forța de presiune a unui lichid asupra unei plăci orizontale cufundate la adâncimea h dela suprafața liberă a lichidului, este egală cu greutatea coloanei de lichid care se sprijină pe placă. Astfel, însemnând cu S suprafața plăcii, cu γ greutatea specifică a lichidului și cu P forța de presiune, obținem :

$$P = \gamma \cdot S \cdot h.$$

Bazați pe faptul că presiunea lichidului este aceeași în toate părțile, să determinăm forța de presiune pe o placă cufundată vertical. La rezolvarea acestei probleme vom urma metoda aplicată la rezolvarea problemelor tratate în paragrafele anterioare.

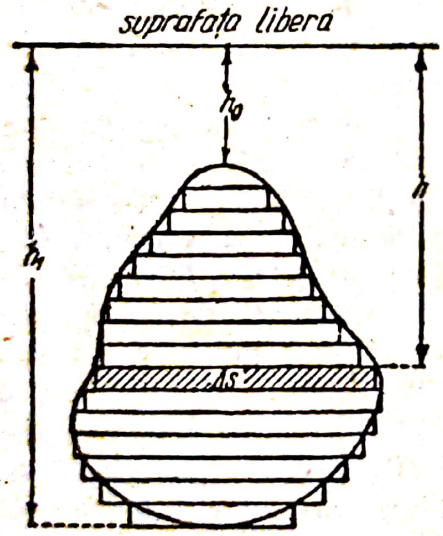

Fig. 132.

Să ne imaginăm placa divizată prin drepte paralele cu suprafața liberă a lichidului, într'un număr mare, n, de fășii înguste (fig. 132) și să considerăm, că presiunea este peste tot la fel pe o astfel de fășie. In realitate, desigur, nu este așa : de exemplu, în partea superioară a fășiei presiunea este, evident, mai mică, decât în cea inferioară. Pentru simplificarea calculului vom considera fășia ca fiind de formă dreptunghiulară și vom însemna cu Δs aria ei. Eroarea intervenită prin ipotezele făcute este un infinit mic de ordin superior și deaceea o putem neglija conform principiului general.

Insemnând cu γ greutatea specifică a lichidului și ținând seama de ipotezele făcute, conchidem că, aproximativ, presiunea asupra fășiei, situată la adâncimea h, este determinată prin produsul $\gamma h\,\Delta s$.

Mărind nemărginit numărul n al fășiilor și trecând la limită (cu condiția ca toate înălțimile fășiilor să tindă către zero), vom afla forța presiunii, P, asupra plăcii :

$$P = \lim \sum_{h_0}^{h_1} \gamma h\,\Delta s = \int_{h_0}^{h_1} \gamma h\,ds, \qquad (4)$$

în care h_0 este adâncimea la care se află punctul cel mai de sus al plăcii, iar h_1 adâncimea punctului celui mai de jos al plăcii.

Vom socoti, mai departe, că greutatea unui metru cub de apă este de 1000 kg = 1 tonă.

Exemplu. Să se afle presiunea exercitată asupra unui stăvilar în formă de trapez, cu bazele paralele de 40 m și 15 m și înălțimea de 8 m. Baza superioară a stăvilarului se află la suprafața apei.

Rezolvare. Conform formulei (4), avem :

$$P = 1000 \int_0^8 h \cdot ds.$$

Pentru a calcula această integrală, trebuie să exprimăm aria ds a unei fâșii oarecare, în funcție de h. Din fig. 133 avem : $ds = CD \cdot dh$.

Insă

$$CD = CF + FD = CF + 15.$$

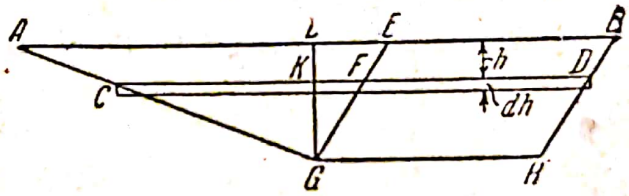

Fig. 133.

Din asemănarea triunghiurilor AGE și CGF, obținem :

$$\frac{CF}{AE} = \frac{GK}{GL} \text{ sau } \frac{CF}{25} = \frac{8-h}{8}, \text{ de unde } CF = \frac{25\,(8-h)}{8}.$$

Prin urmare :

$$CD = \frac{25\,(8-h)}{8} + 15 = \frac{320-25h}{8} = 40 - \frac{25}{8}h.$$

Astfel aflăm :

$$ds = \left(40 - \frac{25}{8}h\right) dh,$$

$$P = 1000 \int_0^8 \left(40 - \frac{25}{8}\right) h\, dh = 746\frac{2}{3} \text{ tone.}$$

Exerciții

La §§ 95, 96, 97.

Să se calculeze următoarele integrale definite :

1. $\int_2^6 x\, dx$. **R** : 16.

2. $\int_0^2 3x^4\, dx$. **R** : 19,2.

Scanned with OKEN Scanner

3. $\int_{-1}^{3}(1-2x+3x^2)\,dx$. R : 24. 4. $\int_{-a}^{+a} x^4\,dx$. R : $\frac{2a^5}{5}$.

5. $\int_{-a}^{+a} x^3\,dx$ R : 0. 6. $\int_{-b}^{+b}(x^2-1)\,dx$. R : $\frac{2b}{3}(b^2-3)$.

7. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2}$. R : $\frac{1}{2}$. 8. $\int_{2}^{3}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$. R : $\frac{2}{3}\left(6\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

9. $\int_{1}^{3}\frac{2x^2+1}{x}\,dx$. R : 3 + ln 2; 10. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. R : $\frac{\pi}{2}$.

11. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$. R : $\frac{\pi}{4}$. 12. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$. R : $\frac{\pi}{8}$.

13. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$. R : $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. 14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$. R : $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

15. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$. R : $\frac{\pi}{4}$. 16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$. R : $\frac{2}{3}$.

17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\,dx$. R : $\frac{2}{15}$. 18. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$. R : $\frac{\pi}{16}$.

19. $\int_{0}^{1}\frac{x^2\,dx}{1+x^3}$. R : $\frac{1}{3}\ln 2$. 20. $\int_{0}^{1}\frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. R : $\frac{\pi}{12}$.

21. $\int_{1}^{e}\frac{\ln x\,dx}{x}$. R : $\frac{1}{2}$.

Să se afle ariile figurilor mărginite de următoarele linii :

22. $y=5x$, $x=2$, $y=0$ R : 10.

23. $y=3x-1$, $x=2$, $x=4$, $y=0$. R : 16.

24. $x-y+1=0$, $3x+2y-12=0$, $y=0$ R : 7,5.

25. $x-4y+2=0$, $x+y-3=0$, $y=0$, R : 2,5.

26. $y^2=4x$, $x=4$, $x=9$. R : $25\frac{1}{3}$.

27. $y = x^3$, $y = 2x$. R: 2.

28. $xy = a^2$, $x = a$, $x = 2a$, $y = 0$. R: $a^2 \ln 2$.

29. $y^2 = ax$, $x^2 = by$. R: $\frac{ab}{3}$.

30. $y^2 = 4{,}5x$, $3x - 4y = 0$. R: 8.

31. $y^2 = 8x$, $2x - 3y + 8 = 0$. R: $\frac{4}{3}$.

32. $x^2 = 9y$, $x - 3y + 6 = 0$. R: $13\frac{1}{2}$.

33. $4x^2 - 8x - y + 5 = 0$, $2x - y + 1 = 0$. R: $2\frac{1}{4}$.

34. $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$. R: $\frac{1}{3}$

35. $3y^2 - 16x + 32 = 0$, $4x - 3y - 8 = 0$. R: 2.

36. $6y^2 - 25x - 50 = 0$, $5x - 6y + 10 = 0$. R: 5.

37. $4x^2 - 9y + 18 = 0$, $2x^2 - 9y + 36 = 0$. R: 8.

38. $5x^2 - 60x + 4y + 160 = 0$, $x^2 - 12x + 2y + 32 = 0$. R: 8.

La § 101.

39. Să se afle volumul unui paraboloid format prin rotația în jurul axei Ox a arcului de parabolă $y^2 = 4x$, cuprins între punctele (0, 0) și (4, 4), în jurul axei Ox:

R: 32π.

40. Să se afle volumul corpului format prin rotația în jurul axei Ox a arcului de parabolă $y = x^2 - 4$, tăiat de axa Ox.

R: $\frac{512}{15}\pi$.

41. Să se afle prin integrare volumul corpului format prin rotația în jurul axei Ox a porțiunii din dreapta $4x - 5y + 3 = 0$, cuprinsă între axele de coordonate.

R: $0{,}09\pi$.

42. Să se afle volumul corpului format prin rotația elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ în jurul axei sale mici.

R: $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Indicație. Volumul V al unui corp format prin rotația unui arc al curbei $y = f(x)$ în jurul axei Oy se calculează cu ajutorul formulei :

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy.$$

43. Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se rotește în jurul axei sale reale. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafața descrisă de hiperbolă și de planele $x = a$ și $x = c$, unde $c > a$.

R : $\frac{\pi b^2}{3}\left(\frac{c^3 - 3a^2c}{a^2} + 2a\right)$.

44. Să se afle volumul corpului format prin rotația în jurul axei Ox a arcului sinusoidei $y = \sin x$, cuprins între origine și punctul $(\pi, 0)$.

R : $\frac{1}{3}\pi^2$.

La § 103.

45. Forța necesară pentru a întinde o bară metalică dela lungimea a la lungimea $a + x$ este egală cu $\frac{kx}{a}$, unde k este o mărime constantă. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru lungirea barei dela lungimea a la lungimea b.

R : $\frac{k(b-a)^2}{2a}$.

46. Un gaz este închis într'un vas cilindric cu un piston mobil, a cărui suprafață este A. Aplicând legea Boyle-Mariotte $pv = k$, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța de presiune a gazului, la mărirea volumului său dela v_1 la v_2.

R : $k \ln \frac{v_2}{v_1}$.

Indicație. Forța de presiune a gazului asupra pistonului este egală cu pA, unde p este presiunea (pe unitatea de suprafață). Dacă pistonul este deplasat cu o distanță dx, lucrul mecanic elementar va fi egal cu $pA\,dx$. Însă $A\,dx$ este creșterea dv a volumului gazului. Prin urmare, $pA\,dx = \frac{k}{v}\,dv$ și lucrul se exprimă prin integrala :

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{k}{v}\,dv,$$

47. După legea lui Newton, forța de atracție este invers proporțională cu pătratul distanței. Un punct material aflat în repaus, atrage alt punct, care se deplasează în linie dreaptă dela distanța r_1 la distanța r_2 de primul punct. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța de atracție.

Scanned with OKEN Scanner

R : $\mu\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right]$, unde μ este un coeficient de proporționalitate.

La § 104.

48. Să se calculeze forța de presiune exercitată asupra unei plăci dreptunghiulare cu baza de 8 cm și înălțimea de 12 cm, cufundată vertical în apă astfel, încât baza superioară a plăcii se află la 5 cm sub nivelul apei.

R : 1056 g.

49. Să se calculeze forța de presiune exercitată pe un triunghi cu baza de 10 cm și înălțimea de 4 cm, cufundat vertical în apă astfel, încât vârful lui se află pe suprafața apei.

R : $53\frac{1}{3}$ g.

50. Să se afle forța de presiune, la care este supus un triunghi cu baza de 8 cm și înălțimea de 6 cm, cufundat în apă astfel, încât vârful care este mai aproape de suprafața liberă a lichidului se află la o distanță de 3 cm de ea.

R : 168 g.

51. O placă de forma unui segment de parabolă, a cărui bază este de 15 cm și înălțimea de 3 cm, este cufundată vertical în apă în așa fel, încât vârful segmentului se află pe suprafața apei. Să se determine forța de presiune la care este supusă placa.

R : 54 g.

COMPLECTARE

CAPITOLUL XI

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL INTÂI CU VARIABILE SEPARABILE

§ 105. Definiții

Ecuație diferențială se numește o ecuație care conține derivate sau diferențiale ale funcției căutate.

Astfel o ecuație de tipul

$$y'' + y = 0 \qquad (1)$$

este o ecuație diferențială. Intr'o ecuație diferențială funcția y a argumentului x este „necunoscuta". A rezolva o ecuație diferențială, înseamnă a afla o funcție y, care satisface ecuația dată, adică o funcție pe care punând-o în locul lui y în ecuația diferențială, aceasta se transformă în identitate. De exemplu, soluția ecuației scrise mai sus este funcția $y = \sin x$. In adevăr, dacă punem în partea stângă a ecuației (1), în locul lui y, funcția $\sin x$, obținem :

$$(\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x,$$

adică obținem 0 în partea stângă și ecuația se transformă în identitate $0=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia care reprezintă soluţia ecuaţiei diferenţiale se numeşte *integrala* ecuaţiei, iar procedeul de aflare a soluţiei se numeşte *integrarea ecuaţiei diferenţiale.*

Se deosebesc integrale sau soluţii *particulare* şi *generale* ale ecuaţiei diferenţiale.

Astfel, funcţia $y = \sin x$ este o integrală particulară a ecuaţiei (1); integrala ei generală este funcţia :

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare. Ne putem convinge uşor că punând această funcţie în ecuaţie o transformăm în identitatea $0=0$.

Ecuaţia (1) se numeşte ecuaţie *de ordinul al doilea,* întrucât ea conţine o derivată de ordinul al doilea. Dacă ecuaţia conţine numai derivata de ordinul întâi, atunci ea se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordinul întâi.*

Există ecuaţii diferenţiale de cele mai variate tipuri. Ne vom limita să cercetăm tipul cel mai simplu de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, aşa numitele *ecuaţii cu variabilele separabile* (§ 107). In prealabil să analizăm câteva probleme care ne duc la ecuaţii diferenţiale.

§ 106. Exemple de probleme care duc la ecuaţii diferenţiale

1. Să se afle ecuaţia curbei care are proprietatea următoare : coeficientul unghiular al tangentei în fiecare punct al curbei este îndoitul abscisei punctului.

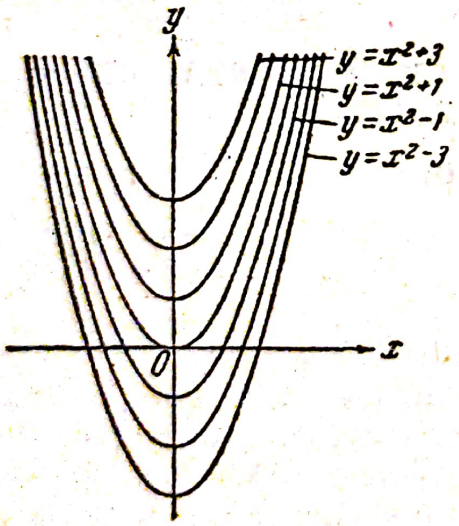

Fig. 134.

Rezolvare. Conform enunţului problemei formăm ecuaţia :

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Inmulţind ambii membri cu dx obţinem :

$$dy = 2x\,dx.$$

Integrăm acum fiecare membru al ecuaţiei obţinute $\int dy = \int 2x\,dx$; aflăm : $y = x^2 + C$, unde C este constanta de integrare.

Funcţia aflată este integrala generală a ecuaţiei diferenţiale. Integrala generală conţine o constantă arbitrară C. Astfel am aflat nu o singură funcţie, ci o mulţime nenumărată de funcţii, care se deosebesc între ele prin valoarea constantei C.

Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că am obţinut, nu o singură curbă, ci o familie de curbe, corespunzătoare unor valori diferite pentru C (fig. 134).

Dacă s'ar mai cere în problemă ca curba căutată să treacă printr'un punct anumit al planului, de exemplu, prin punctul (2, 3), am obţine o soluţie unică,

Intrucât numai o singură parabolă din familia de parabole $y = x^2 + C$ ar corespunde acestei condiții suplimentare. In adevăr, coordonatele (2, 3) trebue să satisfacă condiții curbei căutate; aceasta este însă posibil numai pentru o singură valoare C, pe care o vom afla înlocuind coordonatele (2, 3) în ecuația familiei $y = x^2 + C$; în felul acesta obținem: $3 = 4 + C$, de unde $C = -1$, și ecuația curbei căutate va fi:

$$y = x^2 - 1.$$

Se spune că am aflat *valoarea lui C din condițiile inițiale.*

2. Un punct pleacă din starea de repaos și în momentul t se mișcă cu viteza $v = gt$, unde g este o mărime constantă. Să se afle legea mișcării punctului, adică se să afle relația dintre mărimea s a spațiului, parcurs de punct, și timpul t

Rezolvare. După cum știm (§ 53), viteza v este derivata spațiului s după timpul t, adică $v = \frac{ds}{dt}$.

Intrucât în problemă ni se dă că $v = gt$, ajungem la ecuația diferențială:

$$\frac{ds}{dt} = gt.$$

Transcriind-o sub forma $ds = gt\,dt$, integrăm fiecare membru:

$$\int ds = \int gt\,dt,$$

de unde obținem: $s = \frac{1}{2} gt^2 + C$.

Pentru a afla valoarea constantei C, observăm că pentru $t = 0$, și $s = 0$. Inlocuind aceste valori în soluția obținută, aflăm: $C = 0$.

Prin urmare, legea mișcării, pe care o căutăm, se exprimă prin funcția:

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

3. Viteza de răcire a unui corp în aer este proporțională cu diferența între temperatura corpului și temperatura aerului. Temperatura aerului este egală cu 20 °C. Se știe că în timp de 20 minute corpul se răcește dela 100° la 60°. In ce timp corpul se va răci până la temperatura de 30°?

Rezolvare. Viteza de răcire este viteza de modificare a temperaturii corpului în raport cu timpul și se exprimă deaceea sub forma derivatei $\frac{dT}{dt}$ (§ 53), unde temperatura corpului este însemnată cu T, iar timpul cu t.

Pe de altă parte, pe baza legii de răcire, dată în problemă, viteza de răcire poate fi exprimată astfel:

$$k(T - 20),$$

unde k este un coeficient de proporționalitate.

Comparând cele două expresii care definesc viteza de răcire a corpului, ajungem la ecuația diferențială :

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20).$$

Transcriind-o sub forma :

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt$$

și integrând în ambele părți, obținem : $\ln (T - 20) = kt + C$.

Pe baza definiției logaritmului putem scrie egalitatea obținută, sub forma :

$$T - 20 = e^{kt+C}$$

sau

$$T - 20 = e^{kt} \cdot e^{C}.$$

Punând $e^{C} = c$, obținem :

$$T - 20 = ce^{kt}.$$

In soluția obținută valorile mărimilor c și k sunt încă necunoscute. Pentru a determina pe c, observăm că pentru $t = 0$, temperatura T a corpului este egală cu 100°. Substituind aceste valori, obținem : $80 = ce^{0}$, de unde $c = 80$.

Avem, prin urmare :

$$T - 20 = 80e^{kt}. \qquad (A)$$

Rămâne de determinat valoarea lui k. Știm, că în timp de 20 minute corpul se răcește până la 60°, prin urmare că pentru $t = 20$ temperatura $T = 60$. In felul acesta obținem relația :

$$40 = 80\ e^{20k},$$

de unde putem determina pe k. Insă în loc să determinăm valoarea lui k, vom determina valoarea lui e^{k} ; aflăm : $e^{20k} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$ și $e^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$.

Acum putem scrie egalitatea (A) sub forma următoare :

$$T - 20 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \qquad (B)$$

Astfel am aflat relația care determină variația temperaturii T în funcție de variația timpului t.

Pentru a răspunde întrebării puse în problemă, trebue să determinăm, folosind această relaţie, valoarea lui t pentru $T = 30$. Punând în egalitatea (B) $T = 30$, obţinem :

$$10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

de unde $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$; prin urmare, $\frac{t}{20} = 3$ şi $t = 60$.

Deci corpul se va răci la temperatura de 30° în timp de o oră.

4. Avem 100 litri dintr'o soluţie care conţine 10 kg sare disolvată. În rezervorul în care se află soluţia, curge apă cu viteza de 3 litri pe minut ; amestecul curge din rezervor cu aceeaşi viteză ; prin amestecare, gradul de concentraţie rămâne mereu uniform. Câtă sare va conţine soluţia după o oră?

Rezolvare. Fie x cantitatea de sare care se află în rezervor după t minute. Atunci gradul de concentraţie c va fi :

$$c = \frac{x}{100} \text{ kg pe 1 litru.}$$

Viteza cu care scade cantitatea de sare în rezervor în momentul t se exprimă prin derivata $\frac{dx}{dt}$. Pe de altă parte, întrucât soluţia curge din rezervor cu o viteză de 3 litri pe minut, aceeaşi viteză de modificare a cantităţii de sare se va determina prin expresia $\frac{3x}{100}$. Deoarece x este o funcţie descrescătoare de t, derivata $\frac{dx}{dt}$ este o mărime negativă, şi deaceea vom avea egalitatea :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}$$

(în partea dreaptă a egalităţii, x este pozitiv).

Relaţia obţinută poate fi scrisă sub forma următoare :

$$\frac{dx}{x} = -0{,}03\, dt.$$

Integrând în ambele părţi, obţinem : $\ln x = -0{,}03t + C$.

Cum pentru $t = 0$, cantitatea de sare este $x = 10$, vom avea expresia aflată : $\ln 10 = C$.

Astfel obţinem relaţia, care defineşte cantitatea de sare x, după t minute : $\ln x = -0{,}03t + \ln 10$.

Punând $t = 60$, vom afla cantitatea de sare, care rămâne în rezervor după o oră : $\ln x = -1{,}8 + \ln 10$.

Folosindu-ne de tabela logaritmilor naturali, obţinem : $x = 1654$ g.

§ 107. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Dacă prin diferite transformări o ecuaţie diferenţială poate fi adusă la forma :

$$\varphi(y)\ dy = f(x)\ dx, \tag{2}$$

obţinem o *ecuaţie cu variabile separabile.* Procedeul de aducere a ecuaţiei la forma de mai sus se numeşte *separarea variabilelor.* Soluţia unei astfel de ecuaţii se obţine prin integrarea ambelor părţi. Astfel, integrând ecuaţia (2), aflăm soluţia generală :

$$\int \varphi(y)\ dy = \int f(x)\ dx + C, \tag{3}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Posibilitatea de a integra ambele părţi ale ecuaţiei :

$$\varphi(y)\ dy = f(x)\ dx,$$

cu toate că ele se exprimă prin variabile diferite, se bazează pe următoarele consideraţii :

Partea dreaptă a ecuaţiei (2) o putem considera ca diferenţiala unei funcţii necunoscute $F(x)$ de argument x. Această funcţie o aflăm integrând expresia $f(x)\ dx$:

$$F(x) = \int f(x)\ dx.$$

Partea stângă a ecuaţiei (2) reprezintă deasemenea diferenţiala unei funcţii oarecare $\Phi(y)$ a argumentului y, pe care o putem determina integrând expresia $\varphi(y)\ dy$:

$$\Phi(y) = \int \varphi(y)\ dy.$$

Insă după sensul ecuaţiei diferenţiale considerate, y este o funcţie de x; prin urmare, $\Phi(y)$ poate fi considerată ca o funcţie de funcţie a argumentului x, iar derivata funcţiei $\Phi(y)$, după variabila independentă x, va fi definită prin expresia $\Phi'(y)y'$ (conform formulei derivatei unei funcţii de funcţii, § 62), iar diferenţiala, prin expresia $\Phi'(y)y'\ dx$. Insă, conform definiţiei integralei (nedefinite), $\Phi'(y) = \varphi(y)$, iar produsul $y'\ dx$ este dy, după definiţia diferenţialei ; prin urmare $\Phi'(y)y'dx = \varphi(y)\ dy$, adică expresia $\varphi(y)\ dy$ este diferenţiala unei funcţii oarecare a variabilei independente x. In felul acesta, ecuaţia (2) exprimă egalitatea între diferenţialele a două funcţii ale variabilei independente x. Insă dacă diferenţialele a două funcţii sunt egale, atunci însăşi funcţiile se deosebesc între ele printr'un termen constant, şi deaceea putem scrie :

$$\int \varphi(y)\ dy = \int f(x)\ dx + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile cu variabile separabile, care nu sunt date într'o formă atât de simplă ca forma (2), pot fi aduse adeseori la această formă, aplicând regula pentru separarea variabilelor de mai jos.

Primul pas. Aducem toți termenii ecuației la numitorul comun, pe care îl simplificăm, și dacă ecuația conține derivate, înmulțim cu diferențiala variabilei independente.

Pasul al doilea. Adunăm într'un singur termen toți termenii care conțin diferențiala variabilei independente și tot astfel procedăm cu termenii care conțin diferențiala funcției. Dacă, prin aceasta, ecuația capătă forma :

$$XY\,dx = X_1Y_1\,dy,$$

unde X, X_1 sunt funcții numai de x, iar Y, Y_1 funcții numai de y, atunci ea poate fi adusă la forma (1) prin împărțire la X_1Y.

Pasul al treilea. Integrăm ambele părți ale ecuației [formula (3)].

Exemplu. Să se integreze ecuația :

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax.$$

Rezolvare.
Primul pas :

$$(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = ax\,dx.$$

Pasul al doilea :

$$x(y - a)\,dx + (1 - x^2)\,dy = 0, \quad \frac{x\,dx}{1 - x^2} + \frac{dy}{y - a} = 0.$$

Pasul al treilea :

$$\int \frac{x\,dx}{1 - x^2} + \int \frac{dy}{y - a} = \ln c,$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + \ln(y - a) = \ln c,$$

unde C se pune sub forma $\ln c$.

$$\frac{y - a}{\sqrt{1 - x^2}} = c, \quad y = a + c\sqrt{1 - x^2}.$$

Exerciții

Să se integreze următoarele ecuații :

1. $y\,dx - x\,dy = 0.$ — R : $y = cx.$
2. $(1 + y)\,dx - (1 - x)\,dy = 0.$ — R : $(1 + y)(1 - x) = c.$
3. $(1 + x)y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0.$ — R : $\ln xy + x - y = c.$

Scanned with OKEN Scanner

4. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$. R : $\frac{x+y}{xy} + \ln\frac{y}{x} = c$.

5. $x^2\,dy + (y - a)\,dx = 0$. R : $y - a = ce^{\frac{1}{x}}$.

6. $(1 + y^2)\,dx - x^{\frac{1}{2}}\,dy = 0$. R : $2\sqrt{x} - \operatorname{arctg} y = c$.

7. $dy + y \operatorname{tg} x\,dx = 0$. R : $y = c \cos x$.

8. $\cos x \sin y\,dy - \cos y \sin x\,dx = 0$. R : $\cos y = c \cos x$.

9. Să se afle ecuația curbei, pentru care coeficientul unghiular al tangentei în orice punct este egal cu $3x - 2$.

R : $y = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$.

10. Să se afle ecuația curbei care trece prin punctul (0, 3), știind că coeficientul unghiular al tangentei duse în orice punct al curbei este egal cu $x^2 + 5x$.

R : $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3$.

11. Să se afle ecuația curbei care trece prin punctul (1, 1), știind că coeficientul unghiular al tangentei duse în orice punct al curbei este proporțional cu pătratul ordonatei punctului.

R : $k(x - 1)y - y + 1 = 0$, unde k este un coeficient de proporționalitate.

Presupunând că $s = 0$ pentru $t = 0$, să se afle relația dintre s și t, știind că viteza v este egală cu :

12. Mărimea constantă v_0. R : $s = v_0 t$.

13. $m + kt$. R : $s = mt + \frac{1}{2}kt^2$.

14. $3 + 2t - 3t^2$. R : $s = 3t + t^2 - t^3$.

15. Viteza unui corp care pornește din starea de repaus este după t secunde egală cu $5t^2$ m/s. Să se determine :

1) cât de departe se va afla corpul de punctul de plecare după 3 secunde;

2) în ce timp va parcurge corpul 360 m, socotiți dela punctul de plecare?

R : 1) 45 metri; 2) 6 secunde.

16. Să se afle legea mișcării unui corp care se deplasează cu o viteză proporțională cu drumul parcurs, știind că după 10 secunde corpul parcurge 100 metri și după 15 secunde, 200 metri.

R : $s = 25 \cdot (2)^{\frac{t}{5}}$.

17. Temperatura aerului este de 15 °C. Se știe că în 30 minute un corp se răcește dela 90° la 40 °C. Care va fi temperatura corpului după o oră dela măsurătoarea inițială?

R : $23^1/_3$ °C.

Indicație. Metoda de rezolvare, ca în exemplul 3, § 106.

18. Gradul de activitate al unei substanțe radioactive este proporțional cu viteza de scădere a acesteia din urmă. Să se afle dependența acestui grad de activitate, de timp (t), știind că în interval de 4 zile el s'a redus la jumătate.

R : $R = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{4} t}$.

19. Intr'un rezervor se află 100 litri soluție, care conține 10 kg sare disolvată. Apa se scurge în rezervor cu o viteză de 3 litri pe minut și curge din el cu viteza de 2 litri pe minut, concentrația rămânând uniformă prin amestecare. Câtă sare va conține amestecul după 1 oră?

R : 3,9 kg.

CAPITOLUL XII

COORDONATE POLARE

§ 108. Unghiuri orientate

In capitolul I am studiat posibilitatea de a determina poziția unui punct în plan cu ajutorul coordonatelor liniare. Această metodă nu este singura ; există multe alte metode de a determina poziția unui punct cu ajutorul coordonatelor. Cea mai uzitată, afară de cea expusă, este metoda așa numitelor coordonate polare.

Determinarea poziției unui punct cu ajutorul coordonatelor polare reclamă introducerea noțiunii de unghi orientat.

Presupunând că această noțiune este cunoscută cititorului din trigonometrie, ne vom opri asupra ei numai pe scurt.

Intr'un plan se poate face o rotație în două sensuri. Dacă unul din sensurile rotației este considerat pozitiv, celălalt — rotația inversă — este considerat negativ.

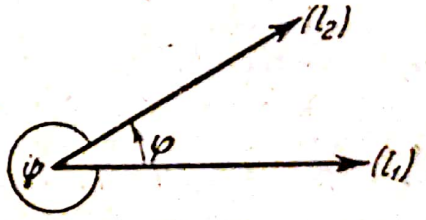

Fig. 135.

Deobicei se consideră pozitiv sensul rotației opus sensului de rotație al acelor de ceasornic.

In mod corespunzător, vom numi unghi pozitiv între direcțiile (l_1) și (l_2) acel unghi care se formează prin rotația razei (l_1) în sens opus mișcării acelor de ceasornic până la coincidența cu raza (l_2). Valorii numerice a acestui unghi φ, măsurat în grade sau radiani, i se atribue

Scanned with OKEN Scanner

semnul + (de exemplu, $+30^\circ$ sau $+\frac{\pi}{6}$ radiani). Unghiul ψ, socotit dela (l_1) la (l_2) în sens opus (fig. 135), este considerat negativ (-330° sau $-\frac{11\pi}{6}$ radiani).

Dar direcţiile (l_1) şi (l_2) nu definesc numai un singur unghi, ci un număr infinit de unghiuri, întrucât prin rotirea uneia din razele (l_1) sau (l_2) într'o parte sau în cealaltă cu un număr întreg de rotaţii complecte, el va reveni la poziţia iniţială. Deaceea putem considera drept unghi între (l_1) şi (l_2) nu numai unghiul φ (sau ψ, v. fig. 135), dar pe oricare din unghiurile $\varphi + 2\pi k$, k fiind un număr întreg pozitiv sau negativ, ales arbitrar.

§ 109. Coordonatele polare ale unui punct în plan

Să trecem acum la definirea poziţiei unui punct în plan cu ajutorul coordonatelor polare. Alegem în plan un punct oarecare O, pe care îl numim *pol*, şi ducem din polul O într'o direcţie dată semidreapta OA (fig. 136). Raza OA o numim *axă polară*.

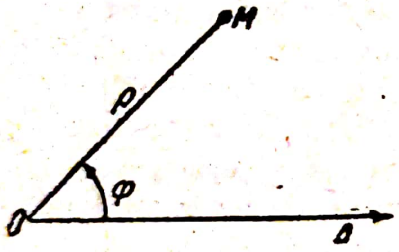

Fig. 136.

Fie M un punct oarecare în plan, care nu coincide cu O. Insemnăm cu ρ lungimea segmentului OM, şi cu φ unghiul format de acest segment cu axa polară, socotit într'un sens anumit dela această axă şi prevăzut, în consecinţă, cu un semn. Deci, conform notaţiilor noastre.

$$\rho = OM, \quad \varphi = \sphericalangle AOM.$$

Evident, mărimile ρ şi φ definesc pe deplin poziţia punctului M în plan; aceste mărimi se numesc *coordonate polare* ale punctului M.

Pentru a exprima, că punctul M are coordonatele ρ şi φ, vom scrie astfel: $M(\rho, \varphi)$. După terminologia generală ρ se numeşte rază vectoare a punctului M, iar unghiul φ unghi polar.

Se vede imediat că, pentru a obţine toate punctele din plan, este suficient să atribuim lui ρ toate valorile pozitive posibile, iar unghiul φ să-l facem să varieze dela 0 la 2π cu excluderea valorii extreme 2π*).

Astfel, fiecărei perechi de valori ρ şi φ îi va corespunde un singur punct M al planului şi, invers, fiecărui punct M al planului îi va corespunde o singură pereche de valori ρ şi φ.

*) Pentru $\varphi = \pi$ am obţine aceleaşi puncte în plan ca şi pentru $\varphi = 0$, adică axa polară.

O excepţie este polul căruia îi corespunde raza vectoare egală cu zero, iar valoarea unghiului polar φ rămâne nedeterminată.

Foarte adeseori este convenabil a renunţa la îngrădirile impuse la variaţia mărimilor ρ şi φ şi a accepta că i se pot atribui lui ρ şi valori negative, iar unghiului φ felurite valori, atât pozitive, cât şi negative. In cazul acesta urmează să considerăm punctul M ca fiind situat pe o axă care trece prin punctele O şi M, pe care axă sensul pozitiv poate fi stabilit în mod arbitrar.

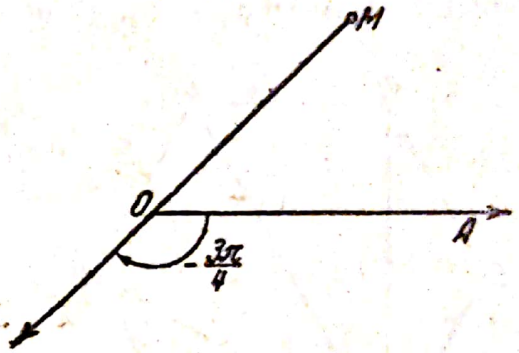

Fig. 137.

Deobicei sensul pozitiv pe această axă se stabileşte astfel : fiind dat unghiul φ, rotim cu acest unghi direcţia axei polare : axa polară rotită defineşte sensul pozitiv al axei, pe care se află punctul M. Valorile pozitive ale lui ρ le măsurăm atunci în partea pozitivă, valorile negative, în partea negativă a axei.

Fie, de exemplu, de construit punctul M, dat prin coordonatele sale $\rho = -4$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$. Rotind axa polară în jurul punctului O cu un unghi de $\frac{3\pi}{4}$ radiani, în sensul mişcării acelor de ceasornic, obţinem axa pe care trebue să se afle punctul M.

Cum raza vectoare este egală cu 4 unităţi negative, vom afla punctul M pe axa construită, însemnând dela pol 4 unităţi de lungime în sensul opus celui însemnat cu săgeată (fig. 137). Desigur, dacă ρ şi φ ar putea lua valori arbitrare pozitive şi negative, fiecărui punct al planului nu i-ar corespunde o pereche unică de coordonate.

De exemplu, punctului M construit mai sus i-ar corespunde coordonatele :

$$\rho = 4, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}; \qquad \rho = -4, \varphi = \frac{5\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \quad \varphi = -\frac{7\pi}{4}; \qquad \rho = -4, \varphi = -\frac{3\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \quad \varphi = \frac{9\pi}{4}; \qquad \rho = -4, \varphi = \frac{13\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \quad \varphi = -\frac{15\pi}{4}; \qquad \rho = -4, \varphi = -\frac{11\pi}{4};$$

$$\rho = 4, \quad \varphi = \frac{17\pi}{4}; \ldots \quad \rho = -4, \quad \varphi = \frac{21\pi}{4}; \ldots$$

$$\rho = 4, \quad \varphi = -\frac{23\pi}{4}; \ldots \rho = -4, \varphi = -\frac{19\pi}{4}; \ldots$$

In general dacă notăm o pereche oarecare de coordonate ale unui punct în plan cu ρ_0 şi φ_0, atunci aceluiaşi punct îi vor corespunde coordonatele :

$$\rho = \rho_0,$$

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$$

şi :

$$\rho = -\rho_0,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \pi + 2k\pi,$$

unde k este un număr întreg arbitrar pozitiv, negativ, sau zero.

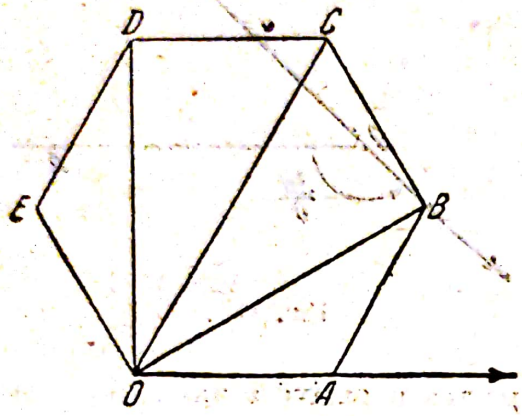

Fig. 138.

Exemplu. Să se calculeze coordonatele polare ale vârfurilor unui hexagon regulat, având latura egală cu a, luând ca pol unul din vârfuri şi ca axă polară o latură care porneşte din acest vârf (fig. 138).

Rezolvare Vârful A are coordonatele $(a, 0)$. Pentru a determina coordonatele punctului B observăm că triunghiul OAB este isoscel, având unghiurile la bază egale cu $\frac{\pi}{6}$ radiani.

Deaceea înălţimea triunghiului coborîtă din vârful A este egală cu $\frac{a}{2}$; iar segmentul :

$$OB = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}.$$

Prin urmare, coordonatele vârfului B vor fi $\left(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$. Mai departe, OC, fiind diametrul cercului circumscris, este egal cu $2a$, iar $\angle BOC$ este egal cu $\frac{\pi}{6}$. Astfel, avem pentru punctul C coordonatele : $\rho = 2a$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Se vede imediat că $OD = OB$ şi, prin urmare, pentru punctul D obţinem : $\rho = a\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Pentru vârful E, avem : $\rho = a$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

In fine, vârful O, care coincide cu polul, are coordonatele $\rho = 0$, φ nedeterminat.

§ 110. Formulele de trecere dela sistemul de coordonate polare la sistemul rectangular și invers

Foarte adeseori este necesar să aflăm coordonatele carteziene ale unui punct când sunt date coordonatele lui polare, sau, invers, cunoscând coordonatele rectangulare, să determinăm coordonatele polare ale punctului. Deaceea ne vom ocupa cu deducerea unor formule, care stabilesc legătura între aceste sisteme de coordonate.

Cu această ocazie ne vom limita numai la cazul când polul coincide cu originea, iar axa polară cu direcția pozitivă a axei Ox.

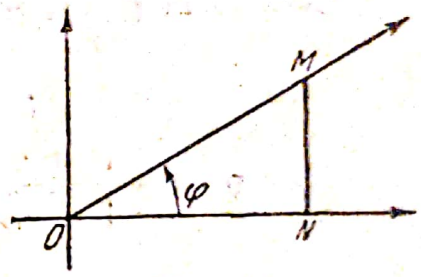

Fig. 139.

Să luăm, deci, polul O ca origine a coordonatelor rectangulare, axa polară ca axă Ox și ca axă Oy o dreaptă perpendiculară pe Ox, a cărei direcție pozitivă este aleasă astfel, încât unghiul între axele de coordonate să fie $+\frac{\pi}{2}$.

Să luăm un punct M cu coordonatele $\rho > 0$ și $\varphi > 0$. Atunci obținem din triunghiul dreptunghic ONM (fig. 139), ținând seama, că $ON = x$ și $NM = y$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aceste formule rămân valabile *pentru orice poziție a punctului M în raport cu axa de coordonate.*

Să luăm, de exemplu, cazul când punctul M are coordonatele $\rho < 0$ și $\varphi < 0$ (fig. 140).

Să introducem unghiul auxiliar $\psi = \varphi + \pi$; atunci obținem:

$$x = -\rho \cos \psi, \quad y = -\rho \sin \psi \quad (\text{aici } -\rho > 0)$$

sau: $x = -\rho \cos(\pi + \varphi) = \rho \cos \varphi$, $y = -\rho \sin(\pi + \varphi) = \rho \sin \varphi$.

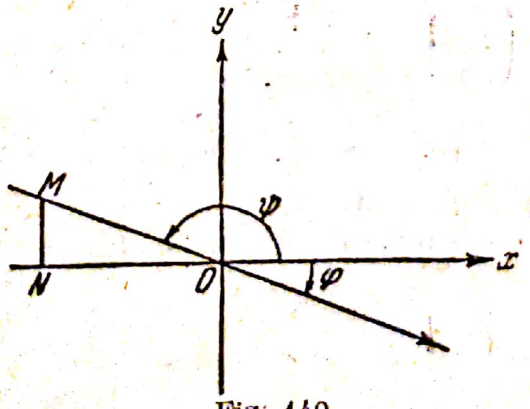

Fig. 140.

Ne putem convinge ușor de exactitatea formulei (1) și pentru alte cazuri date ale coordonatelor ρ și φ.

Formulele pentru trecerea inversă se deduc din formulele (1). Din aceste formule avem: $x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$, de unde:

$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (2)$$

şi mai departe :

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3}$$

Semnul din faţa radicalului poate fi ales arbitrar, însă acelaşi pentru toate formulele (2) şi (3).

Dacă luăm $\rho > 0$, atunci formulele precedente vor lua forma :

$$\left.\begin{aligned} \rho &= +\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi &= \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

Din formulele deduse urmează că :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Calculul după formulele (2) şi (3) se face mai bine astfel : alegând un semn anumit în faţa radicalului, calculăm pe ρ şi, după semnele lui $\cos\varphi$ şi $\sin\varphi$, definim cadranul corespunzător al cercului trigonometric ; calcularea unghiului φ după tabele se efectuează mai uşor, folosind formula (4) care dă totodată un rezultat mai precis.

Exemplul 1. Să se afle coordonatele rectangulare x şi y ale unui punct dacă se dă : $\rho = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Rezolvare. Conform formulelor (1) avem :

$$x = 5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$y = 5\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 5\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplul 2. Să se afle coordonatele polare ale unui punct, dacă sunt date coordonatele lui rectangulare : $x = \sqrt{3}$, $y = -1$.

Rezolvare. Luând în faţa radicalului semnul —, avem din formulele (2) şi (3) :

$$\rho = -\sqrt{3+1} = -2, \quad \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}.$$

După semnele lui $\cos\varphi$ și $\sin\varphi$ conchidem că unghiul φ se află în cadranul al doilea : prin urmare,

$$\varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

Dacă am fi convenit să considerăm numai valorile pozitive ρ, am avea :

$$\rho = +2, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2},$$

adică

$$\varphi = \frac{11\pi}{6}.$$

Exemplul 3. Să se afle distanța între două puncte $M_1(\rho_1, \varphi_1)$, $M_2(\rho_2, \varphi_2)$.

Rezolvare. Folosind notații cunoscute, avem :

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\rho_2\cos\varphi_2 - \rho_1\cos\varphi_1)^2 +$$
$$+ (\rho_2\sin\varphi_2 - \rho_1\sin\varphi_1)^2 = \rho_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) +$$
$$+ \rho_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) - 2\rho_1\rho_2(\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1) =$$
$$= \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Astfel am obținut o formulă cunoscută din trigonometrie.

§ 111. Curba și ecuația ei în coordonate polare

După cum știm, generalizarea ideii de definire a poziției unui punct cu ajutorul coordonatelor rectangulare ne-a permis să introducem ecuația liniei. Acest lucru este perfect valabil și pentru cazul coordonatelor polare.

Fie dată o curbă printr'o proprietate geometrică, adică ca un loc geometric. O vom considera drept traiectoria mișcării unui punct M care are coordonatele curente ρ și φ. Atunci proprietății geometrice care definește linia, trebue să-i corespundă o relație analitică între coordonatele ρ și φ, care va fi chiar ecuația liniei. In forma generală, ecuația unei linii în coordonate polare poate fi scrisă în forma :

$$\rho = f(\varphi),$$

ρ fiind considerat ca o funcție a unghiului φ.

Se constată imediat că, invers, funcția

$$\rho = f(\varphi)$$

exprimă din punct de vedere geometric o linie curbă. In adevăr, să admitem că, pentru $\varphi = \varphi_1$, raza-vectoare ρ ia valoarea ρ_1. Să construim punctul $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ (fig. 141). Să dăm lui φ valoarea φ_2 și să admitem, că valoarea corespunzătoare pentru ρ va fi ρ_2. Construim punctul $M_2(\rho_2, \varphi_2)$. Vom modifica acum în mod continuu valorile lui φ dela φ_1 la φ_2, astfel ca φ să treacă succesiv prin toate valorile intermediare între φ_1 și φ_2. Raza-vectoare ρ se va modifica atunci dela ρ_1 la ρ_2, segmentul OM_1 va începe să se rotească în jurul punctului O; simultan cu rotația, lungimea lui se va modifica și extremitatea M_1 va descrie o linie curbă oarecare.

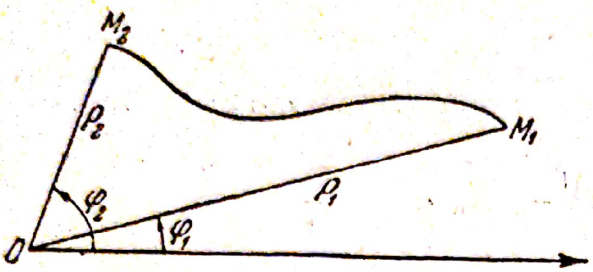

Fig. 141.

In felul acesta, am stabilit, și pentru cazul coordonatelor polare, că unei linii curbe, date printr'o proprietate geometrică, îi corespunde ecuația $\rho = f(\varphi)$ și, invers, ecuației $\rho = f(\varphi)$ îi corespunde o curbă.

De aici rezultă problemele: 1) se dă o linie ca un loc geometric de puncte; să se stabilească ecuația acestei linii; și 2) se dă o ecuație între coordonatele φ și ρ; să se construiască linia exprimată prin această ecuație.

Să cercetăm acum unele exemple.

§ 112. Exemple de stabilire a ecuației unei linii în coordonate polare și construirea curbei după ecuația ei

1. Cercul

Fie a raza cercului. Așezăm axa polară după diametrul orizontal al cercului și polul în extremitatea din stânga a acestui diametru. Centrul cercului îl însemnăm cu C (fig. 142).

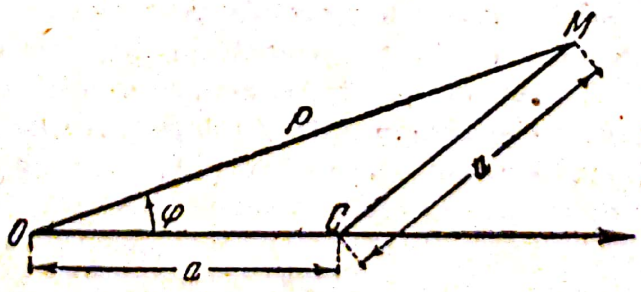

Fig. 142.

Fie M un punct oarecare al cercului având coordonatele curente ρ și φ. Formula distanței între două puncte (§ 110, exemplul 3) ne dă expresia $\overline{CM}^2 = a^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi$, de unde:

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Să vedem cum variază ρ, când punctul M descrie cercul când unghiul φ se măreşte.

Să începem cu valoarea $\varphi = \varphi_1 = 0$. Valoarea corespunzătoare pentru ρ va fi egală cu $2a \cos 0 = 2a$. Obţinem punctul M_1 (fig. 143). Când unghiul φ, mărindu-se, va lua valorile pozitive φ_2, φ_3, etc., punctul M va ocupa poziţiile M_2, M_3 etc.

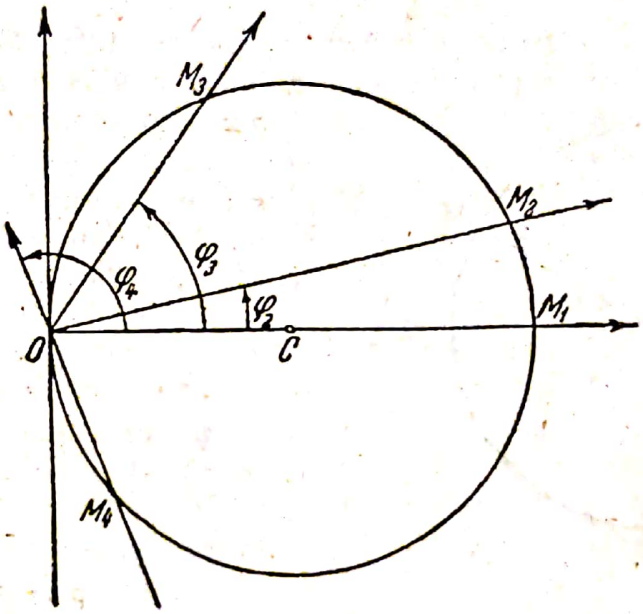

Fig. 143.

Când punctul M se apropie de pol, unghiul φ se va apropia de $\frac{\pi}{2}$ cum rezultă clar din figură, iar $\rho = 2a \cos \varphi$ va scădea dela $2a$ la 0 (întrucât $\cos \varphi$ descreşte dela 1 la 0, când φ creşte dela 0 la $\frac{\pi}{2}$).

Dacă φ creşte mai departe, punctul M trece în partea inferioară a cercului şi va ocupa o poziţie pe partea negativă a axei OM; prin urmare, ρ va deveni negativ (d. ex. raza-vectoare OM_4), ceeace concordă perfect cu ecuaţia:

$$\rho = 2a \cos \varphi,$$

întrucât la trecerea lui φ prin $\frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi$ devine negativ. In fine, când φ se apropie de π, ne întoarcem la punctul M_1; $\cos \varphi$ tinde atunci către -1, prin urmare ρ se va apropia de $-2a$.

Propunem cititorului să urmărească variaţiile lui φ şi ρ în cel de al doilea înconjur al cercului.

Ecuaţia $\rho = 2a \cos \varphi$ am fi putut s'o obţinem, deasemenea, pornind dela ecuaţia cercului în coordonate rectangulare, cu ajutorul

formulelor de trecere dela coordonate rectangulare la cele polare. Aceste formule au fost stabilite pentru cazul când polul coincide cu originea sistemului rectangular, iar axa polară este îndreptată după axa Ox. La o asemenea aşezare a axelor Ox şi Oy, coordonatele centrului cercului vor fi $(a, 0)$, iar ecuaţia lui este :

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Să trecem acum în coordonate polare. Intrucât $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, obţinem prin înlocuirea lui x şi y prin aceste expresii :

$$(\rho \cos \varphi - a)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2$$

sau :

$\rho^2 = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)\, 2a\rho \cos \varphi + a^2 = a^2$, de unde obţinem din nou ecuaţia $\rho = 2a \cos \varphi$.

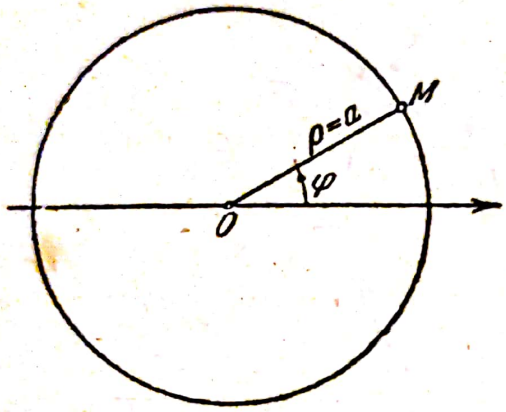

Fig. 144.

Să deducem acum ecuaţia cercului, aşezând polul în centrul lui. In cazul acesta, pentru orice valoare φ, un punct al cercului $M(\rho, \varphi)$ este la o distanţă de pol, egală cu raza cercului, (fig. 144) adică vom avea pentru orice valoare φ :

$$\rho = a.$$

In această ecuaţie nu intră coordonata φ, ceeace indică tocmai proprietatea punctelor cercului de a avea o valoare constantă a razei-vectoare pentru orice valoare a unghiului φ.

Să scriem ecuaţia $\rho = a$ în coordonate rectangulare. Ştiind că $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (§ 110), aflăm : $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ sau $x^2 + y^2 = a^2$; am obţinut ecuaţia cunoscută a cercului cu raza egală cu a şi cu centrul în origine (§ 16).

2. Cardioida

Un cerc de diametrul a se rostogoleşte, fără alunecare, pe un cerc fix de acelaşi diametru. Să se afle ecuaţia curbei descrise de un punct M al cercului care se rostogoleşte.

In fig. 145 este înfăţişată poziţia iniţială a cercului care se rostogoleşte.

Alegem axa polară şi polul aşa cum sunt indicate pe figură. O poziţie a cercului în cursul rostogolirii este înfăţişată în fig. 146; să aflăm ecuaţia traiectoriei punctului M.

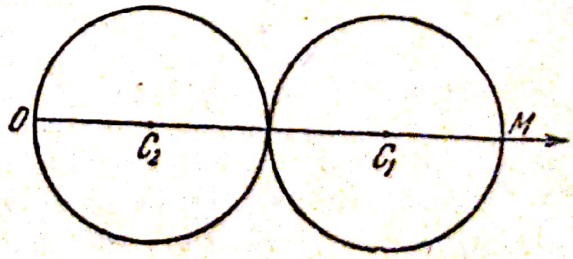

Fig. 145.

Să cercetăm relaţia dintre lungimile arcelor NAO şi NBM. Evident, punctul M, plecând din poziţia sa iniţială, va coincide cu polul O, după ce cercul mobil va fi parcurs jumătate din cercul fix. Prin urmare, lungimea arcului cercului mobil, dela punctul de contact N al ambelor cercuri până în punctul M, este egală cu lungimea arcului cercului fix, dela acelaşi punct N până la pol :

$$\overset{\frown}{NAO} = \overset{\frown}{NBM}.$$

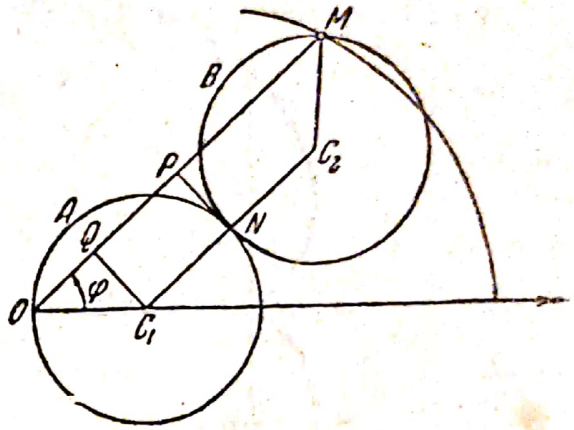

Fig. 146.

Cum razele cercurilor sunt egale, unghiurile la centru $\sphericalangle NC_2M$ şi $\sphericalangle NC_1O$ sunt egale :

$$\sphericalangle NC_2M = \sphericalangle NC_1O.$$

Prin urmare figura OC_1C_2M este un trapez isoscel, şi deaceea segmentele C_1C_2 şi $OM = \rho$ sunt paralele.

Coborînd o perpendiculară din punctul N pe segmentul OM, tragem concluzia : $OP = PM$. Prin urmare, $\rho = 2OP$. Şi întrucât

$$OP = OQ + QP \text{ şi } OQ = \frac{a}{2}\cos\varphi,\ QP = C_1N = \frac{a}{2}$$

aflăm :

$$\rho = 2\left(\frac{a}{2}\cos\varphi + \frac{a}{2}\right)$$

sau

$$\rho = a(1 + \cos\varphi).$$

Aceasta este ecuaţia curbei căutate. Curba se numeşte *cardioidă*. Folosind ecuaţia aflată, să determinăm acum forma cardioidei.

Pentru $\varphi = 0$, raza-vectoare $\rho = 2a$. Punctul M se află pe axa polară, la distanţa $2a$ de pol (poziţia iniţială). Punând $\varphi = \frac{\pi}{2}$ obţinem : $\rho = a$. Pentru valoarea $\varphi = \pi$ aflăm : $\rho = 0$, adică punctul M coincide cu polul. Pentru valoarea $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, raza-vectoare $\rho = a$. Când unghiul φ variază mai departe, punctul M va descrie restul curbei, se va întoarce, pentru valoarea $\varphi = 2\pi$, la poziţia sa iniţială şi apoi va începe să parcurgă din nou aceeaşi curbă. Calculând cu ajutorul tabelelor încă un şir de valori ρ, construind punctele corespunzătoare şi unindu-le cu o linie continuă, obţinem curba înfăţişată în fig. 147.

Curba descrisă de un punct al unui cerc care se rostogoleşte fără alunecare, pe un cerc fix, cu condiţia ca cercul mobil să fie situat în afara cercului fix, se numeşte în general *epicicloidă*. Pentru relaţii diferite între diametrele cercului mobil şi fix, obţinem epicicloide diferite.

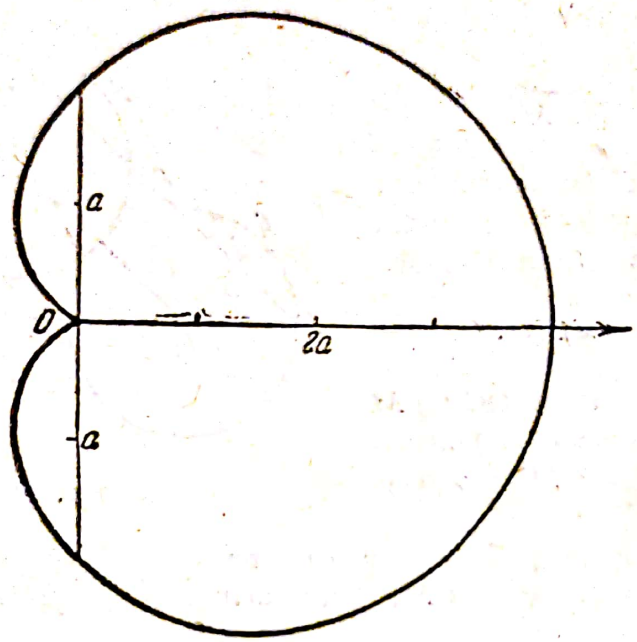

Fig. 147.

In felul acesta, cardioida aparţine categoriei epicicloidelor; ea este epicicloida care se obţine în cazul când diametrul cercurilor, mobil şi fix, sunt egale.

3. Spirala lui Arhimede

Ecuaţia curbei numită spirala lui Arhimede, este:

$$\rho = a\varphi,$$

unde a este un număr pozitiv.

Să determinăm forma spiralei după ecuaţia ei.

Să împărţim unghiul 2π din jurul polului O în mai multe părţi egale, de exemplu în 12 părţi, ducând din pol 12 raze (fig. 148). Aceste raze vor avea faţă de axa polară următoarele înclinaţii:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{12} \qquad \varphi_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{12},$$

$$\varphi_3 = 3\,\frac{2\pi}{12}, \qquad \varphi_4 = 4 \cdot \frac{2\pi}{12}, \text{ etc.}$$

Aflăm din ecuaţia curbei valorile corespunzătoare ale razelor vectoare :

$$\rho_1 = \frac{2\pi a}{12},\ \rho_2 = 2\cdot\frac{2\pi a}{12},\ \rho_3 = 3\cdot\frac{2\pi a}{12},\ \rho_4 = 4\cdot\frac{2\pi a}{12},\ \text{etc.}$$

Luăm un segment oarecare şi vom calcula lungimea lui $2\pi a$.

Pentru construirea punctelor spirale aflate pe raze, rămâne să ducem pe ele segmente egale cu $\frac{2\pi a}{12}$, $2\cdot\frac{2\pi a}{12}$, $3\cdot\frac{2\pi a}{12}$, etc. Astfel vom obţine punctele M_1, M_2, M_3 etc.

Pentru construirea punctelor corespunzătoare valorilor $\varphi > 2\pi$, observăm următoarele. Admitem că am considerat φ egal cu $\varphi = \frac{2\pi}{12} + 2\pi$; vom căuta valoarea corespunzătoare a razei-vectoare :

$$\rho = a\left(\frac{2\pi}{12} + 2\pi\right) = \frac{2\pi a}{12} + 2\pi a.$$

Această valoare se deosebeşte de valoarea ρ a primului punct situat pe aceeaşi rază, cu $2\pi a$, adică cu lungimea segmentului luat de noi. Prelungind acum prima rază şi măsurând pe ea, dela punctul construit mai înainte $\left(\frac{2\pi a}{12}, \frac{2\pi a}{12}\right)$, un segment de lungime $2\pi a$, obţinem un alt punct al curbei. Pe figura 148, acesta va fi punctul M_{13}. Tot astfel putem construi puncte şi pe celelalte raze, întrucât valorile unghiului φ, pentru punctele noi, se vor deosebi de valorile lui φ pentru punctele construite anterior, de fiecare dată, cu 2π. Observând că pentru $\varphi = 0$ corespunde punctul $(0, 0)$ şi pentru $\varphi = 2\pi$ punctul M_{12} $(2\pi q, 2\pi)$, unim toate punctele construite printr'o linie continuă şi obţinem curba arătată în fig. 148.

In mod analog se poate construi graficul spiralei lui Arhimede, considerând variaţia lui φ în sens negativ. Această curbă va fi simetrică faţă de curba din fig. 148 în raport cu o dreaptă perpendiculară pe axa polară şi care trece prin pol.

4. Spirala hiperbolică $\rho = \frac{a}{\varphi}\ (a > 0)$

Observăm în prealabil că pe măsură ce unghiul φ se apropie de 0, raza-vectoare creşte nelimitat. Pentru $\varphi = \pi$, raza-vectoare $\rho_0 = \frac{a}{\pi}$; pentru $\varphi = 2\pi$ raza-vectoare este de două ori mai mică $\left(\rho = \frac{a}{2\pi} = \frac{\rho_0}{2}\right)$; pentru $\varphi = 3\pi$, raza-vectoare este egală cu $\frac{\rho_0}{3}$ etc. Când unghiul φ creşte nemărginit, valorile razei-vectoare se apropie de 0, fără

a atinge această valoare. Deci, curba se va apropia nelimitat de polul O, încolăcindu-se în jurul lui fără însă a-l atinge vreodată.

Un astfel de punct se numeşte *punctul asimptotic* al curbei.

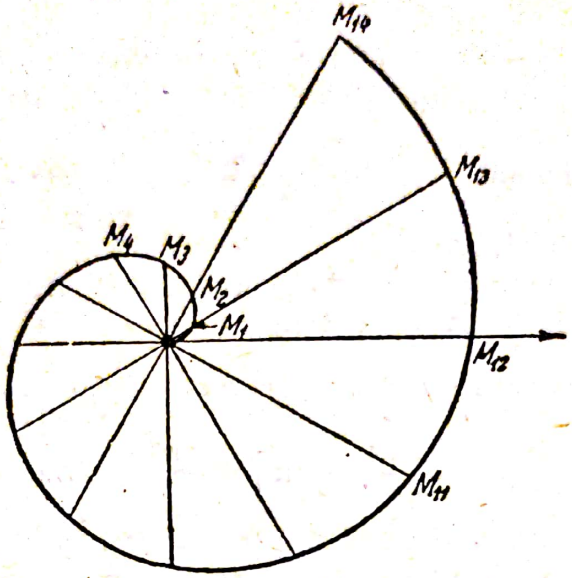

Fig. 148.

Pentru a construi graficul funcţiei să scriem ecuaţia ei în forma :

$$a = \rho\varphi.$$

Din faptul că produsul dintre raza-vectoare şi unghiul φ rămâne totdeauna o mărime constantă, decurge următorul mod de construcţie a punctelor spiralei.

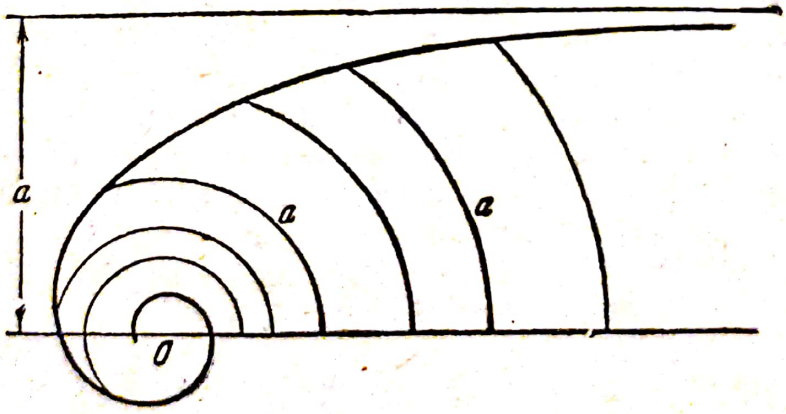

Fig. 149.

Ducem un număr de cercuri concentrice cu centrul în pol şi pe fiecare cerc, plecând dela punctul lui de intersecţie cu axa polară, măsurăm un arc de lungime a. Lungimea fiecărui arc este egală cu produsul dintre unghiul corespunzător φ şi ρ, adică $\rho \cdot \varphi$; prin urmare, extremitatea fiecărui arc va fi un punct care aparţine spiralei (fig. 149).

Pe măsura depărtării de pol, razele cercurilor se măresc, arcul a devine tot mai puţin curb, tinzând să se transforme într'un segment de dreaptă, perpendicular pe axa polară. Aceasta arată că, pe măsura apropierii unghiului φ de 0, punctele spiralei se apropie de o dreaptă paralelă cu axa polară, care trece la distanţa a de această axă. Distanţa punctelor spiralei la această dreaptă scade mereu, însă nu se anulează niciodată. In acest caz, se spune că spirala se apropie asimptotic de dreapta indicată (compară cu asimptotele hiperbolei § 24).

Pentru valorile negative ale unghiului φ, rezultă o spirală simetrică cu cea de mai sus, în raport cu perpendiculara pe axa polară, care trece prin pol.

5. Spirala logaritmică $\rho = ae^{m\varphi}$ $(a > 0, m > 0)$

Pentru $\varphi = 0$, raza-vectoare $\rho_0 = a$. Pentru valorile pozitive ale unghiului φ, raza-vectoare $\rho = ae^{m\varphi} > \rho_0$. Pentru unghiuri negative $(\varphi = -\varphi', \varphi' > 0)$ avem: $\rho = ae^{m\varphi'} = ae^{-m\varphi'} = \frac{a}{e^{m\varphi'}}$ adică $\rho < \rho_0$.

De aici tragem concluzia că, modificând unghiul φ în sens negativ, nu vom mai obţine o curbă simetrică cu spirala, care corespunde unghiurilor pozitive φ, cum era cazul la spirala logaritmică şi la spirala lui Arhimede. Plecând din punctul $(\rho_0, 0)$ şi dând unghiurilor φ valori negative $(\varphi = -\varphi')$, obţinem prelungirea curbei. Cum, în acest caz, $\rho = \frac{a}{e^{m\varphi'}}$ înseamnă că, pentru o creştere nelimitată a valorii absolute a lui φ, raze-vectoare se va micşora nelimitat şi curba se va încolăci în jurul polului, apropiindu-se nelimitat de el.

Expresia $\frac{a}{e^{m\varphi'}}$ nu se anulează niciodată; aceasta înseamnă că şi pentru spirala logaritmică polul este un punct asimptotic.

Construcţia spiralei logaritmice se poate efectua în felul următor. Dacă dăm unghiului polar φ un şir de valori, care formează o progresie aritmetică, atunci raza-vectoare va lua un şir de valori, care formează o progresie geometrică:

$$\varphi = 0,\ \varphi_1 = \varphi_1,\ \varphi_2 = 2\varphi_1,\ \varphi_3 = 3\varphi_1,\ \varphi_4 = 4\varphi_1, \ldots$$
$$\rho_0 = ae^{m0} = a,\ \rho_1 = ae^{m\varphi_1},\ \rho_2 = ae^{m\varphi_2} = a(e^{m\varphi_1})^2,$$
$$\rho_3 = ae^{m\varphi_3} = a(e^{m\varphi_1})^3,\ \rho_4 = ae^{m\varphi_4} = a(e^{m\varphi_1})^4, \ldots$$

Să luăm mai întâi următoarele valori φ:

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{8},\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{8},\ \varphi_3 = \frac{3\pi}{8},\ \ldots,\ \varphi_8 = \frac{8\pi}{8} = \pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să calculăm valorile corespunzătoare ale razei-vectoare :

$$\rho_2 = a,\ \rho_1 = ae^{m\frac{\pi}{8}},\ \rho_2 = a\left(e^{m\frac{\pi}{8}}\right)^2,$$

$$\rho_3 = a\left(e^{m\frac{\pi}{8}}\right)^3, \ldots, \rho_8 = a\left(e^{m\frac{\pi}{8}}\right)^8.$$

In felul acesta, împărţind unghiul $\varphi = \pi$ în opt părţi egale şi măsurând pe razele respective segmente corespunzătoare valorilor calculate ale razei-vectoare, obţinem 9 puncte ale spiralei (fig. 150). Pe figură sunt indicate punctele :

$$A(\rho_0, 0),\ M\left(\rho_2, \frac{\pi}{4}\right), B\left(\rho_4, \frac{\pi}{2}\right), N\left(\rho_6, \frac{3\pi}{4}\right), C\left(\rho_8, \pi\right),\ \text{etc.}$$

Construcţia unui alt şir de puncte poate fi făcută acum în mod geometric. In acest scop observăm că $\varphi_4^2 = \rho_0\rho_8$, adică raza-vectoare ρ_4, corespunzătoare unghiului $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$, este media proporţională între razele-vectoare ρ_0 şi ρ_8, corespunzătoare unghiurilor $\varphi_0 = 0$ şi $\varphi_8 = \pi$*)

Prin urmare segmentele AB şi BC sunt perpendiculare.

Dacă ridicăm o perpendiculară pe BC în punctul C, atunci intersecţia ei cu dreapta OB dă punctul D, care aparţine deasemenea spiralei, findcă $OC^2 = OB \cdot OD$ sau $a^2(e^{m\pi})^2 = ae^{\frac{m\pi}{2}} \cdot OD$, de unde $OD = ae^{\frac{3m\pi}{2}}$, adică segmentul OD este în adevăr egal cu raza-vectoare corespunzătoare unghiului polar $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Intersecţia perpendicularei, ridicată în punctul D pe segmentul CD, cu axa polară dă punctul E al spiralei, etc. In felul acesta, construim oricâte puncte ale spiralei, situate pe dreptele CE şi DB, perpendiculare între ele ; aceste puncte corespund unghiurilor pozitive φ. Efectuând aceeaşi construcţie în sensul unghiurilor φ, obţinem pe aceleaşi drepte oricâte alte puncte ale spiralei (punctele B', C', D', E', F', pe fig. 150). Pentru o reprezentare mai precisă a spiralei, trebue să construim încă un număr de puncte intermediare. Acest lucru poate fi făcut, de exemplu, în felul următor.

*) Relaţia $\varphi_4^2 = \varphi_0\varphi_8$ exprimă o proprietate cunoscută a progresiei geometrice : fiecare termen al unei progresii geometrice este media proporţională între termenii egal depărtaţi de el într'o parte sau în cealaltă.

Luăm valorile calculate ale razei-vectoare : $\rho_2 = a\left(e^{m\frac{\pi}{8}}\right)^2$ şi $\rho_6 = a\left(e^{m\frac{\pi}{8}}\right)^6$. Segmentele OM şi ON, care reprezintă aceste raze-vectoare, sunt situate pe drepte perpendiculare între ele, întrucât unghiul între ρ_2 şi ρ_6 este egal cu $\frac{6\pi}{8} - \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

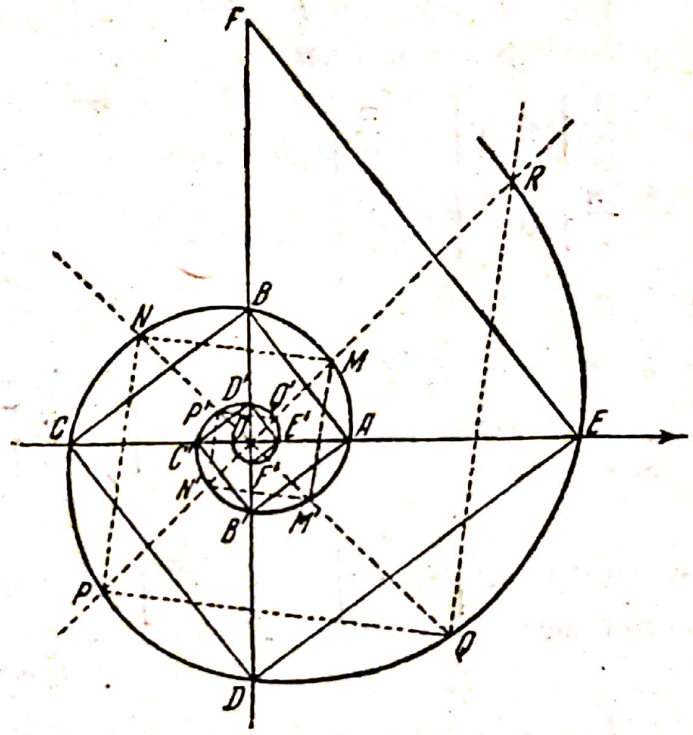

Fig. 150.

Să ridicăm în punctul N perpendiculara pe segmentul NM. Intersecţia acestei perpendiculare cu dreapta pe care se află ρ_2 dă punctul, P, care aparţine spiralei. In adevăr :

$$ON^2 = OM \cdot OP \text{ sau } a^2\left(e^{\frac{6m\pi}{8}}\right)^2 = ae^{\frac{2m\pi}{8}} \cdot OP,$$

de unde $OP = ae^{\frac{10m\pi}{8}}$; unghiul dintre axa polară şi segmentul OP este egal cu $\frac{10\pi}{8}$; prin urmare OP reprezintă raza-vectoare corespunzătoare acestui unghi, şi punctul P se află pe spirală. Prin această metodă construim oricâte puncte ale spiralei, situate pe dreptele desenate punctat în fig. 150, atât în sensul unghiurilor φ pozitive (punctele M,N,P,Q,R), cât şi în sensul unghiurilor negative (punctele M', N', P', Q').

Scanned with OKEN Scanner

Construind un număr suficient de puncte și unindu-le printr'o linie continuă, obținem curba reprezentată în fig. 150.

Exerciții

1 Să se construiască punctele : $A\left(5, \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(5, -\frac{\pi}{6}\right)$; $C\left(-5, \frac{\pi}{6}\right)$; $D\left(-5, -\frac{\pi}{6}\right)$; $E\left(6, \frac{\pi}{8}\right)$; $F\left(4, \frac{10\pi}{6}\right)$; $G\left(2, -\frac{4\pi}{3}\right)$; $H\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$.

2. Să se afle distanța între punctele :

a) $A\left[4, \frac{5\pi}{12}\right]$ și $B\left[5, \frac{\pi}{12}\right]$;

b) $A\left[3, \frac{2\pi}{3}\right]$ și $B\left[4, \frac{\pi}{6}\right]$.

R : *a*) $\sqrt{21}$; *b*) 5.

3. Să se afle aria triunghiului care are un vârf în pol, iar celelalte două vârfuri determinate prin coordonatele : $\left[5, \frac{5\pi}{12}\right]$; $\left[8, \frac{\pi}{4}\right]$.

R : 10.

4. Se dau punctele : $A\left[8, \frac{\pi}{3}\right]$; $B\left[6, \frac{\pi}{6}\right]$. Să se afle distanța dela punctul A la punctul simetric punctului B, în raport cu axa polară.

R : 10.

5. Să se afle unghiurile de înclinație a dreptei care unește punctele $\left[1, \frac{7\pi}{36}\right]$; $\left[2, \frac{67\pi}{36}\right]$, față de razele-vectoare ale acestor puncte.

R : $\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{6}$.

6. Coordonatele unui punct în raport cu două sisteme de coordonate polare, ale căror axe sunt paralele, sunt : $\left[15, \frac{5\pi}{12}\right]$ și $\left[8, \frac{\pi}{12}\right]$.

Să se afle distanța între polii celor două sisteme.

R : 13.

7. In raport cu un sistem de coordonate polare se dau punctele :

$A\left[4, \frac{\pi}{6}\right]$; $B\left[6, \frac{\pi}{4}\right]$; $C\left[6, -\frac{5\pi}{4}\right]$; $D\left[-6, -\frac{7\pi}{4}\right]$; $E\left[-8, \frac{11\pi}{6}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se afle coordonatele rectangulare ale acestor puncte, știind că originea coordonatelor sistemului rectangular coincide cu polul, iar axa absciselor este îndreptată după axa polară.

R: $A(2\sqrt{3}, 2)$; $B(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $C(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $D(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$; $E(-4\sqrt{3}, 4)$.

8. Într'un sistem de coordonate rectangulare se dau punctele: $A(-1, 1)$; $B(0, 2)$; $C(5, 0)$; $D(6, -8)$. Să se afle coordonatele polare ale acestor puncte, în aceleași condiții ca în problema Nr. 7.

R: $A\left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$; $B\left[2, \frac{\pi}{2}\right]$; $C(5, 0)$; $D\left[10, \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$.

9. Cum sunt așezate punctele ale căror coordonate polare satisfac una dintre următoarele relații: *a)* $\rho = 2$; *b)* $\varphi = \frac{\pi}{6}$; *c)* $\varphi = \frac{\pi}{2}$; *d)* $\varphi = 0$.

R: *a)* Pe un cerc cu centrul în pol și raza 2; *b)* și *c)* pe raze care pleacă din poli și formează unghiuri de 30° și 90° cu axa polară; *d)* pe axa polară.

10. Să se construiască curbele date prin următoarele ecuații:

a) $\rho = a \sin \varphi$;
b) $\rho = a \cos 3\varphi$;
c) $\rho = a \sin 3\varphi$;
d) $\rho = a \cos \frac{\varphi}{3}$;
e) $\rho = a \sin^3 \varphi$;
f) $\rho^2 = a^2 \sin 3\varphi$;
g) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$;
h) $\rho = a(1 + \cos 2\varphi)$;
i) $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$;
j) $\rho = a \operatorname{tg} 2\varphi$;
k) $\rho = \frac{2}{\varphi - 1}$.

11. Să se exprime în coordonate polare ecuațiile de mai jos ale unor curbe, date în raport cu un sistem rectangular de coordonate (polul să coincidă cu originea sistemului rectangular, iar axa polară cu axa absciselor):

a) $xy = 7$;
b) $x^2 + y^2 - 8ax - 8ay = 0$;
c) $x^4 + x^2y^2 - a^2y^2 = 0$;
d) $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$.

R: *a)* $\rho^2 \sin 2\varphi = 14$;
b) $\rho = 8a(\cos \varphi + \sin \varphi)$;
c) $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$;
d) $\rho^2 = \cos 2\varphi$.

12. Să se exprime în coordonate rectangulare ecuațiile:
a) cercului: $\rho = a \cos \varphi$ (v. exemplul 1 la § 112).
b) rozetei cu patru foi. $\rho = a \sin 2\varphi$;
c) cardioidei: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (v. exemplul 2 la § 112);

R: *a)* $x^2 + y^2 - ax = 0$;
b) $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$;
c) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

13. Dreapta OA de lungime a se rotește în jurul punctului O. Din punctul A se coboară o perpendiculară pe dreapta fixă OM, care o intersectează în punctul B. Din punctul B se coboară o perpendiculară pe dreapta OA, care, intersectează această dreaptă în punctul P.

Să se afle locul geometric al punctelor P, luând ca pol punctul O și ca axă polară dreapta OM.

R: $\rho = a\cos^2\varphi$.

14. Punctul O se află pe un cerc de rază a. O dreaptă fixă OM trece prin centrul acestui cerc. Din punctul O ducem coarda cercului OP_1 și din punctul P_1 coborîm o perpendiculară pe dreapta OM, pe care o intersectează în punctul Q. Din punctul Q ducem perpendiculara pe dreapta OP_1, care intersectează pe OP_1 în punctul P.

Să se afle locul geometric al punctelor P. Punctul O se va lua ca pol, iar dreapta OM ca axă polară.

R: $\rho = 2a\cos^3\varphi$.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag.

Introducere 3

PARTEA INTÂI

Cap. I. **Coordonatele rectangulare ale unui punct în plan. Probleme elementare pentru aplicarea metodei coordonatelor** 7
1. Determinarea poziţiei unui punct în plan cu ajutorul numerelor (7). 2. Regula semnelor (8). 3. Sistemul rectangular de coordonate al lui Descartes. Coordonatele unui punct în plan (10). 4. Distanţa dintre două puncte (12). 5. Împărţirea unui segment într'un raport dat (14). Exerciţii (17).

Cap. II. **Linia dreaptă** 19
6. Noţiuni despre ecuaţia dreptei. Ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular (19). 7. Ecuaţiile dreptelor paralele cu axele de coordonate; ecuaţiile axelor de coordonate (25). 8. Ecuaţia dreptei sub forma ei generală şi în cazuri particulare (26). 9. Ecuaţia unei drepte care trece printr'un punct dat (ecuaţia unui fascicol de drepte (29). 10. Ecuaţia unei drepte care trece prin două puncte date (30). 11. Ecuaţia unei drepte prin tăieturi (32). 12. Unghiul format de două drepte. (32). 13. Condiţiile de paralelism şi de perpendicularitate a două drepte (35). 14. Intersecţia a două drepte (37). Exerciţii (38).

Cap. III. **Locurile geometrice şi ecuaţiile lor. Curbe de ordinul doi.** . . 44
15. Locuri geometrice şi ecuaţiile liniilor date ca locuri geometrice (44). 16. Cercul (46). 17. Elipsa (48). 18. Determinarea formei elipsei (50). 19. Construcţia punctelor elipsei (53). 20. Excentricitatea elipsei (54). 21. Legătura dintre elipsă şi cerc (55). 22. Hiperbola (55). 23. Determinarea formei hiperbolei (57). 24. Asimptotele hiperbolei (57). 25. Hiperbola echilateră (63). 26. Parabola (65). 27. Parabola $y = Ax^2 + Bx + C$ (67). 28. Ecuaţiile parametrice ale unei curbe (70). 29. Ecuaţiile parametrice ale cercului (71). 30. Ecuaţiile parametrice ale elipsei (72). 31. Curbele de ordinul doi ca secţiuni conice (72). Exerciţii (74).

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A DOUA

ELEMENTELE CALCULULUI DIFERENȚIAL

Pag.

Cap. IV. **Noțiuni asupra funcțiilor și asupra teoriei limitelor** 85
32. Câteva relații legate de noțiunea de valoare absolută a unui număr (85). 33. Mărimi variabile și constante (86). 34. Noțiunea de funcție (87). 35. Notarea generală a funcției (89). 36. Despre determinarea funcțiilor (91). 37. Reprezentarea geometrică a funcției (91). 38. Funcțiile elementare cele mai simple și graficele lor (93). 39. Limita unei mărimi variabile (102). 40. Mărime infinit mică (109). 41. Mărime infinit mare. Legătura între mărimea infinit mică și cea infinit mare (110). 42. Mărime mărginită (114). 43. Teoremele fundamentale asupra mărimilor infinit mici (115). 44. Legătura între variabilă, limita ei și mărimea infinit mică (117). 45. Teoremele fundamentale despre limite (118). 46. Creșterile argumentului și funcției (120). 47. Continuitatea funcției (120). 48. Câteva procedee pentru aflarea limitelor (124). 49. Două teoreme despre funcțiile continue (127). Exerciții (128).

Cap. V. **Noțiuni despre derivată** 133
50. Mișcarea uniformă și viteza ei. Viteza de modificare a unei funcții liniare (130). 51. Mișcarea neuniformă și viteza ei (133). 52. Viteza de variație a funcției (137). 53. Derivata (139). 54. Înclinarea curbei. Tangenta la curbă. Normala (143). 55. Legătura dintre existența derivatei și continuitatea funcției (147). Exerciții (148).

Cap. VI. **Formulele și regulile fundamentale ale calculului diferențial. Derivatele funcțiilor elementare** 151
56. Tabela formulelor fundamentale (151). 57. Derivata unei mărimi constante (152). 58. Derivata unei sume algebrice de funcții (153). 59. Derivata produsului a două funcții (153) 60. Derivata unei puteri întregi pozitive (154). 61. Derivata unei fracții (156). 62. Derivata unei funcții de funcție (157). 63. Exemple (160). 64. Derivata funcției logaritmice : $y=\log_a x$ (162). 65. Derivata unei puteri cu un exponent oarecare (165). 66. Derivata funcției exponențiale (166). 67. Exemple (167). 68. Limita raportului $\frac{\sin z}{z}$ pentru $z \to 0$ (167). 69. Derivatele funcțiilor trigonometrice (170). 70. Exemple (172). 71. Derivatele funcțiilor trigonometrice inverse (172). 72. Exemple (174). Exerciții (175).

Cap. VII. **Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor** 183
73. Mersul variației unei funcții (183). 74. Creșterea și descreșterea funcției într'un interval (184). 75. Maximele și minimele unei funcții. Aflarea extremelor unei funcții (186). 76. Derivata de ordinul doi. Interpretarea mecanică a derivatei a doua (195). 77. A doua regulă pentru aflarea extremelor unei funcții (196). 78. Convexitatea și concavitatea unei curbe într'un punct (198). 79. Punct de inflexiune (201). 80. Construirea graficelor funcțiilor. Exemple (204). Exerciții (207).

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

Cap. VIII. **Diferenţiala** 213
81. Diferenţiala ca parte principală a creşterii funcţiei (213). 82. Interpretarea geometrică a diferenţialei unei funcţii (217). 83. Extinderea regulilor şi formulelor fundamentale pentru aflarea derivatelor, la aflarea diferenţialelor (218). 84. Aplicarea diferenţialei la calcule aproximative (219). 85. Diferenţiala unui arc de curbă (223). 86. Curbura unei curbe (224). 87. Cercul de curbură şi raza de curbură (227). 88. Exemple de calculare a razei de curbură (228). Exerciţii (231).

PARTEA A TREIA

ELEMENTELE CALCULULUI INTEGRAL

Cap. IX. **Integrala nedefinită** 235
89. Integrarea ca o operaţie inversă diferenţierii. Integrala nedefinită (235). 90. Proprietăţile integralei nedefinite, care rezultă direct din definiţia ei (239). 91. Formule fundamentale de integrare (240). 92. Metodele cele mai simple de integrare (242). 93. Determinarea constantei de integrare pe baza condiţiilor iniţiale (249). Exerciţii (250).

Cap. X. **Integrala definită şi aplicaţiile ei** 255
94. Interpretarea geometrică a integralei nedefinite (255). 95. Integrala definită, considerată ca arie (257). 96. Integrala definită ca limita unei sume (260). 97. Proprietăţile cele mai elementare ale integralei definite (265). 98. Principiile aplicării calculului integral (266). 99. Volumul piramidei (268). 100. Exemple de calculare a ariilor (270). 101. Volumul unui corp de rotaţie (273). 102. Volumul conului, al trunchiului de con şi al segmentului de sferă (275). 103. Lucrul mecanic al unei forţe (279). 104. Presiunea unui lichid (280). Exerciţii (281).

COMPLECTARE

Cap. XI. **Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu variabile separabile** . . 285
105. Definiţii (285). 106. Exemple de probleme care duc la ecuaţii diferenţiale (286). 107. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile (290). Exerciţii (291).

Cap. XII. **Coordonate polare** 293
108. Unghiuri orientate (293). 109. Coordonatele polare ale unui punct în plan (294). 110. Formulele de trecere dela sistemul de coordonate polare la sistemul rectangular şi invers (297). 111. Curba şi ecuaţia ei în coordonate polare (299). 112. Exemple de stabilire a ecuaţiei unei linii în coordonate polare şi construirea curbei după ecuaţia ei (300). Exerciţii (310).

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

DICŢIONAR TEHNIC RUSO-ROMÂN
(312 pagini, lei 16,15)

„Dicţionarul Tehnic Ruso-Român", apărut de curând este conceput ca instrument de lucru în mâna traducătorilor, a studenţilor şi a tehnicienilor care şi-au însuşit primele noţiuni de limbă rusă şi doresc să consulte literatura tehnică sovietică în original, muncitorilor şi tehnicienilor care învaţă, precum şi profesorilor care predau limba rusă.

Bogăţia de termeni în limba rusă, corespunzătoare nivelului superior al ştiinţei şi tehnicei sovietice, face dificilă traducerea cea mai justă, în româneşte, în această perioadă în care limba noastră tehnică se făureşte.

Dicţionarul Tehnic Ruso-Român este menit să îmbunătăţească şi să uşureze munca celor ce se documentează direct din lucrările sovietice.

EDITURA TEHNICĂ

MIC DICȚIONAR TEHNIC

Rolul «Micului Dicționar Tehnic» este de a înlesni explicarea terminologiei tehnice pentru cadrele în formare și pentru ceilalți oameni ai muncii care se întâlnesc în munca lor cu limbajul științific și tehnic.

In cuprinsul acestui dicționar sunt explicați peste 10.000 termeni din toate domeniile științei și tehnicei, precum și o serie de termeni economici și agricoli.

470 pagini
12,75 lei

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

TARASOV N. P.: Manual de Matematici Superioare, Ed. II, Bucureşti, Editura Tehnică, 1952, 320 pag.+150 fig. ft. 152×215 mm, lei 14,30, Tip. Centrul Poligrafic Nr. 2, unitatea 2, dat în lucru 15.II.1952, bun de tipar 20.IV.1952, hârtie cărţi şcolare 65 g/m² 610×860/16, Tiraj 10 000+100, coli de tipar 20, coli de editură 22,75.
Comanda 1718 — 9878/951

Pentru bibliotecile mici indicele de clasificare zecimală este 516

Scanned with OKEN Scanner

CĂRȚI APARUTE

Lexiconul tehnic român

Vol. I (A—C), 952 pagini, 127,50 lei
Vol. II (D—H), 986 pagini, 127,50 lei
Vol. III (I—M), 1115 pagini, 127,50 lei

Manualul inginerului (Hütte)
1266 pagini, 63,75 lei

★

Ing. D. I. Ciurileanu
Tabele trigonometrice
320 pagini, 27,63 lei

★

I. I. Prilov și S. A. Galpern
Bazele analizei infinitezimale
Traducere din limba rusă, 240 pagini, 10,07 lei

★

I. B. Petrovschi
Lecții de teoria ecuațiilor integrale
Traducere din limba rusă, 120 pagini, 4,25 lei

★

Prof. A. C. Vlasov
Curs de matematică superioară
Traducere din limba rusă
Vol. I 448 pagini, 25,50 lei
Vol. II 480 pagini, 26,90 lei

★

N. V. Efemov
Geometrie superioară
Traducere din limba rusă, 544 pagini, 30,60 lei

LEI 14,30

Scanned with OKEN Scanner